SUPERFICIES CUÁDRICAS

Una **superficie cuádrica** es la gráfica de una ecuación de segundo grado con tres variables x, y, z. La forma más general de tal ecuación es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

donde $A, B, \ldots, J$ son constantes, pero por traslación y rotación puede llevarse a alguna de las dos formas estándar:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad o \quad Ax^2 + By^2 + Iz = 0.$$

Las superficies cuádricas son las análogas a las secciones cónicas del plano, pero en tres dimensiones.

A fin de dibujar la gráfica de una superficie cuádrica (o de cualquier superficie), resulta útil determinar las curvas de intersección de la superficie con los planos paralelos a los planos coordenados. Estas curvas de llaman **trazas** de la superficie.

ELIPSOIDES

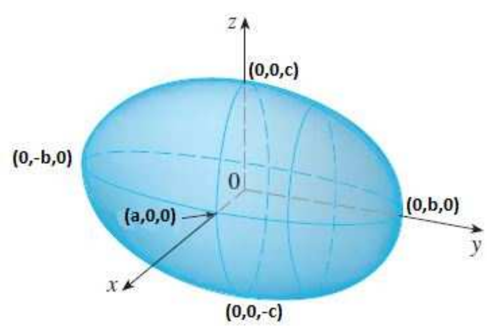
La superficie cuádrica con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

se llama **elipsoide** porque sus trazas son elipses. Por ejemplo el plano horizontal $z = k$ (donde $-c < k < c$) interseca la superficie en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}, \quad z = k$$

y, en particular, la traza en el plano xy es justamente la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$. De manera similar las trazas en los otros planos coordenados son las elipses con ecuaciones $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$ y $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0$. La siguinte muestra la forma de dibujar algunas trazas que indican la forma del elipsoide.



Las seis intersecciones del elipsoide son $(\pm a, 0, 0), (0, \pm b, 0), (0, 0, \pm c)$.y el elipsoide está dentro del área

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c.$$

Puesto que la ecuación sólo tiene potencias pares de x, y, z, el elipsoide es simétrico con respecto a cada plano coordenado.

Si dos de los tres semiejes a, b y c son iguales, entonces el elipsoide es una superficie de revolución. Por ejemplo, si $c = a$, entonces el elipsoide podría obtenerse haciendo girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, alrededor del eje y. Si $a = b = c$, el elipsoide es una esfera.

HIPERBOLOIDES

La superficie cuádrica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2)$$

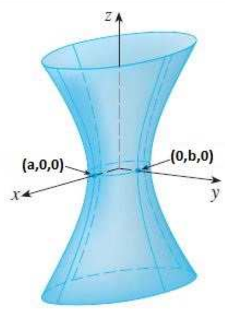
también es simétrica con respecto a los planos coordenados. La traza en cualquier plano horizontal $z = k$ es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}, \quad z = k$$

pero las trazas en los planos xz e yz son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \ \ y = 0 \quad y \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \ \ x = 0$$

Esta superficie consta de sólo una pieza, por lo que se le llama **hiperboloide de una hoja**.



Al eje z se lo llama el **eje** de este hiperboloide. Si el signo menos de la ecuación 2 está enfrente del primero o segundo término, en lugar del tercero, entonces el eje es el eje x ó y, respectivamente.

Si $a = b$ en la ecuación 2, la superficie es un hiperboloide de revolución, y se obtiene al rotar una hipérbola alrededor del eje z.

Ahora, consideremos la superficie

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (3)$$

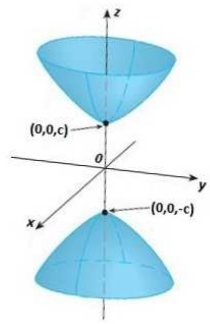
Las trazas en los planos xz e yz son las hipérbolas

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ \ y = 0 \quad y \quad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ \ x = 0$$

Si $|k| > c$, el plano horizontal $z = k$ cruza la superficie en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1, \ \ z = k$$

pero si $|k| < c$, el plano $z = k$ no cruza en ningún punto a la superficie. Por consiguiente, la superficie consta de dos partes, una sobre el plano $z = c$, y la otra por debajo del plano $z = -c$. Por ello, se le nombra **hiperboloide de dos hojas**, cuyo eje es el eje z.



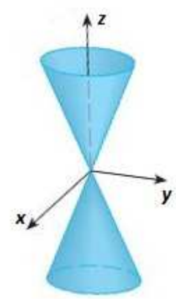
Observar que, al comparar las ecuaciones 2 y 3, la cantidad de signos negativos en la ecuación indica el número de hojas del hiperboloide.

CONOS

Si reemplazamos el lado derecho de la ecuación 2 o de la 3 por 0, obtenemos la superficie

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{4}$$

que es un **cono**. Esta superficie tiene la propiedad de que si P es cualquier punto del cono, entonces la recta $0P$ está por completo en el cono.



Se puede ver que las trazas en los planos horizontales $z = k$ son elipses, y las trazas en los planos verticales $x = k$ o $y = k$ son hipérbolas cuando $k \neq 0$, pero son un par de rectas si $k = 0$.

El cono dado en la ecuación 4 es asíntotico a ambos hiperboloides dados en las ecuaciones 2 y 3.

PARABOLOIDES

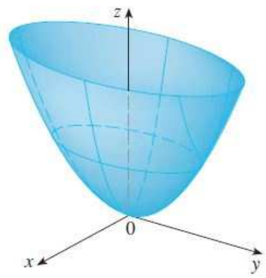
La superficie

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{5}$$

se llama **paraboloide elíptico** porque sus trazas en los planos horizontales $z = k$ son elipses, en tanto que sus trazas en los planos verticales $x = k$ o $y = k$ son parábolas. Por ejemplo, su traza en el plano yz es la parábola

$$z = \frac{c}{b^2} y^2, \quad x = 0.$$

El eje del paraboloide dada por la ecuación 5 es el eje z y su vértice es el origen. El caso en el que $c > 0$ se ilustra en la figura.

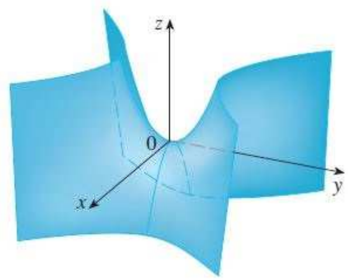


Si $a = b$, la superficie es un **paraboloide circular**, tambén llamado paraboloide de revolución.

El **paraboloide hiperbólico**

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{6}$$

también tiene parábolas en sus trazas verticales, pero tiene hipérbolas en sus trazas horizontales. El caso en el que $c < 0$ se muestra en la figura



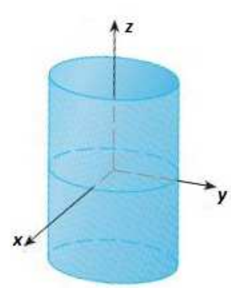
Observar que la forma de la superficie cerca del origen se parece a una silla de montar.

CILINDROS CUADRÁTICOS

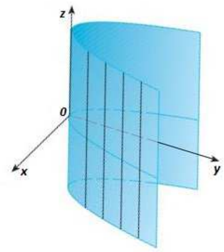
Cuando una de las variables x, y o z falta en la ecuación de una superficie, entonces ésta es un **cilindro**. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

representa un **cilindro elíptico** $\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$. Todas las trazas horizontales son elipses congruentes y los generadores del cilindro son las rectas verticales.



El **cilindro parabólico** $y = ax^2$ se ilustra en la figura



EJEMPLO 1 Identificar y dibujar la superficie $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

Dividiendo por -4, escribimos la ecuación en su forma estándar

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

Comparando esta expresión con la ecuación 3, vemos que representa un hiperboloide de dos hojas, la única diferencia es que en este caso el eje del hiperboloide es el eje y. Las trazas en los planos xy e yz son las hipérbolas

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = 0 \qquad y \qquad \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1, \quad x = 0.$$

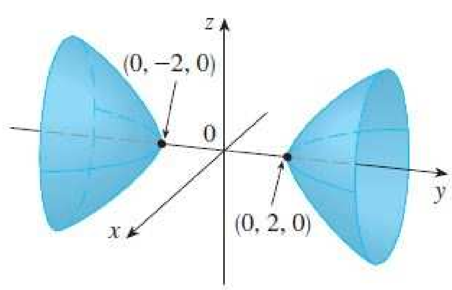
La superficie no tiene trazas en el plano xz, pero las trazas en los planos verticales $y = k$ para $|k| > 2$ son las elipses

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1, \quad y = k$$

las cuales pueden expresarse como

$$\frac{x^2}{\frac{k^2}{4} - 1} + \frac{z^2}{2(\frac{k^2}{4} - 1)} = 1, \quad y = k.$$

Estas trazas se utilizan para hacer el dibujo de la superficie.

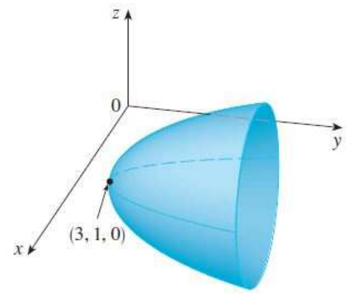


EJEMPLO 2 Clasificar la superficie cuádrica $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$.

Al completar cuadrados, expresamos la ecuación como

$$y - 1 = (x - 3)^3 + z^2$$

Comparándola con la ecuacón 5, vemos que es un paraboloide elíptico. Sin embargo aquí, el eje del paraboloide es paralelo al eje y, y su vértice es el punto $(3, 1, 0)$. Las trazas en el plano $y = k$ $(k > 1)$ son las elipses $(x - 3)^3 + z^2 = k - 1$, $y = k$. La traza en el plano xy, es la parábola de ecuación $y - 1 = (x - 3)^3$, $z = 0$. La gráfica de esta superficie es



EJEMPLO 3 Identificar y dibujar la superficie $x^2 + z^2 = 1$.

En este caso, falta la variable y, entonces es un cilindro cirsular cuyo eje es el eje y. Se obtiene al tomar el círculo $x^2 + z^2 = 1,\ y = 0$ en el plano xz y moverlo de manera paralelo al eje y.