SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

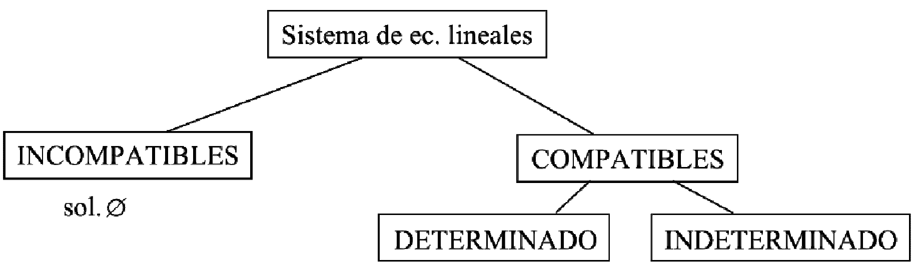
En adelante consideraremos un cuerpo K = $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Consideremos el sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas (x_1, x_2,...,x_n)

$$(1)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{donde } a_{ij}, b_i \in \mathrm{K} \\ 1 \le i \le m \wedge 1 \le j \le n \end{array}$$

se dice que un sistema de n números $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$ es una **solución** del sistema de ecuaciones (1) si cada una de las ecuaciones del mismo se convierte en una identidad después de haber sustituído en ellas las incógnitas x_i , i=1,…., n por los correspondientes valores $k_1, k_2, k_3, k_4, ..., k_n$.

- ✓ Un sistema de ecuaciones puede no tener solución, y entonces se lo denomina **incompatible**.
- ✓ Si el sistema de ecuaciones tiene solución se denomina **compatible**.
- ✓ Se dice que un sistema de ecuaciones es **compatible determinado** si la solución es única; y es **compatible indeterminado** si tiene infinitas soluciones.
- ✓ Si en (I) $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = ... = b_n = 0$ el sistema de ecuaciones se llama **homogéneo** y siempre es compatible pues $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = ... = x_n = 0$ es solución.



El problema de la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales consiste en la elaboración de métodos que permitan establecer si un sistema dado es compatible o no y, en caso de ser compatible, indicar el número de soluciones y señalar un método para hallarlas todas.

Método de eliminación de Gauss:

Consideremos un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas como (1), por el método de eliminación de Gauss se obtiene un sistema de ecuaciones distinto, de más fácil solución y equivalente al anterior en el sentido que son ambos compatibles o ambos incompatibles, y si son compatibles, poseen las mismas soluciones.
El método consiste en aplicar al sistema original (1) las siguientes y únicas

transformaciones llamadas **operaciones elementales**:

I) Intercambiar ecuaciones entre sí.
II) Multiplicar una ecuación por una constante no nula
III) Reemplazar una ecuación por la que resulta de sumar a la misma otra ecuación multiplicada por una constante no nula.

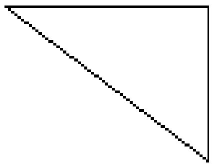
En el sistema (1) podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a_{11} \neq 0$
Transformamos el sistema utilizando una operación elemental del tipo III, "eliminando" la incógnita x_1 de todas las ecuaciones menos de la primera. De este modo obtenemos un sistema equivalente de *s* ecuaciones ($s \leq m$) con *n* incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}\,x_2 + a'_{23}\,x_3 + \ldots + a'_{2n}\,x_n = b'_2 \\ \quad \vdots \\ \qquad a'_{s2}\,x_2 + a'_{s3}\,x_3 + \ldots + a'_{sn}\,x_n = b'_m \end{cases} \qquad (2)$$

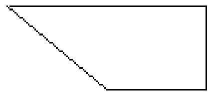
Transformamos el sistema (2) sin modificar la primera ecuación y efectuamos las transformaciones solamente con la parte del sistema (2) formado por todas las ecuaciones menos la primera. Se elimina así x_2 de todas las ecuaciones menos de la primera y la segunda, pero ¿cuándo finaliza el proceso de eliminación de incógnitas?

Si en el proceso de las transformaciones obtenemos una ecuación en la cual **todos los coeficientes son 0** y el **término independiente es distinto de 0**, el sistema es **INCOMPATIBLE**.

Si no ocurre tal situación el sistema será **COMPATIBLE**.
Un sistema **COMPATIBLE** será :
DETERMINADO si se puede reducir a una forma **triangular**
(nº de ecuaciones = nº de incógnitas)



INDETERMINADO si se puede reducir a una forma **trapezoidal**
(nº de ecuaciones < nº de incógnitas)



Notación matricial de un sistema de ecuaciones lineales:

El sistema (1)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

puede expresarse en la forma A.$\vec{x} = \vec{b}$ con notación matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{matriz de coeficientes}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{vector de} \\ \text{incógnitas}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}}_{\substack{\text{vector} \\ \text{constante}}}$$

Por lo tanto, en lugar de efectuar las operaciones en las ecuaciones del sistema, podemos realizarlas en las **filas** de la **matriz aumentada:**

Dado un sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $\vec{x} \in M_{n\times 1}(K)$, $\vec{b} \in M_{m\times 1}(K)$, llamamos **matriz aumentada** o **ampliada** u **orlada**, a la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

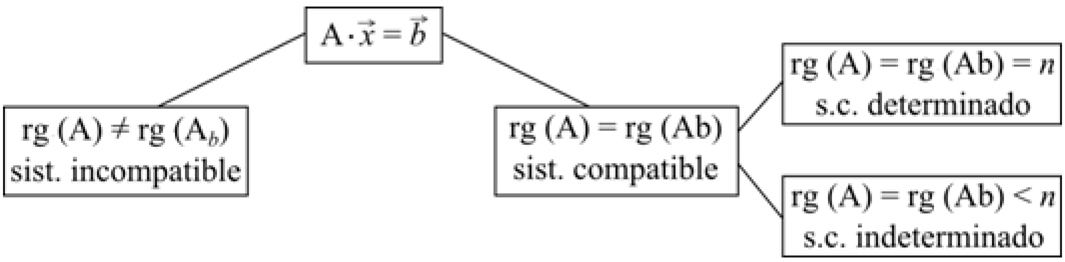
Teorema: si el sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas es compatible y si *r* es el rango fila de la matriz ampliada, entonces:

i) Si $r < n$ el sistema tiene **infinitas soluciones**
ii) Si $r = n$ el sistema tiene **solución única**

Teorema: Sea A es la matriz de coeficientes del sistema y A_b es la matriz ampliada, entonces,

si **rg(A)** $\neq$ **rg(A_b)**, el sistema es **incompatible**

En resumen:



Nota: en el caso de un sistema compatible indeterminado, las infinitas soluciones dependen de n-r parámetros

Ejemplos:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-1 \\ 3x_1-x_2+2x_3=7 \\ 5x_1+3x_2-4x_3=2 \end{cases}$

$$\mathrm{A}_b=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \mathrm{F}_2 \to \mathrm{F}_2-3\mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_3 \to \mathrm{F}_3-5\mathrm{F}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{array}\right) \sim \mathrm{F}_3 \to \mathrm{F}_3-\mathrm{F}_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$\begin{array}{l} \mathrm{rg.}(\mathrm{A})=2 \\ \mathrm{rg.}(\mathrm{A}_b)=3 \end{array}$ $\quad \mathrm{rg.}(\mathrm{A}) \neq \mathrm{rg.}(\mathrm{A}_b)$ por lo tanto el sistema es **incompatible**

2) $\begin{cases} x_1+2x_2+7x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=2 \\ 3x_1-2x_2+5x_3=-5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & -5 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \mathrm{F}_2 \to \mathrm{F}_2+\mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_3 \to \mathrm{F}_3-3\mathrm{F}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -8 \end{array}\right) \sim \mathrm{F}_3 \to \mathrm{F}_3+\frac{8}{3}\mathrm{F}_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{array}{l} \mathrm{rg.}(\mathrm{A})=2 \\ \mathrm{rg.}(\mathrm{A}_b)=2 \end{array}$ $\quad \mathrm{rg.}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg.}(\mathrm{A}_b)=2<3$

por lo tanto el sistema es compatible indeterminado y las soluciones dependen de n - r = 3 – 2 = 1 parámetro

$$3x_2+6x_3=3 \Rightarrow x_2=1-2x_3$$
$$x_1+2x_2+7x_3=1 \Rightarrow x_1=1-2(1-2x_3)-7x_3 \Rightarrow x_1=-1-3x_3$$

y por lo tanto las soluciones estarán dadas por $\mathrm{S}=\{(-1-3x_3\ ,1-2x_3\ ,x_3), x_3 \in \mathrm{K}\}$

o bien S= $\begin{cases} x_3=a & a \in \mathrm{K} \\ x_2=1-2a \\ x_1=-1-3a \end{cases}$

Definición: Una matriz es de la forma **escalonada reducida** si y sólo si satisface:

a) Cualquier fila cuyas componentes sean todas cero, está debajo de aquellas filas que tengan una componente no nula.
b) La primera componente no nula de cada fila que no tenga todos sus elementos nulos, es un 1 (uno capital)

c) El número de ceros al comienzo de una fila aumenta a medida que descendemos.
d) Todos los demás elementos de la columna donde aparece un 1 capital, son ceros.

Ejemplos:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Esta definición nos proporciona otro método para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El mismo consiste en tomar la matriz aumentada del sistema y realizar las operaciones elementales necesarias para obtener una matriz de la forma escalonada reducida.

Definición: El rango fila de una matriz escalonada reducida, es el número ***r*** de filas no nulas de la matriz.

Teorema: un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas es **incompatible** si y sólo si la forma escalonada reducida de la matriz aumentada del sistema tiene una fila cuyos elementos son todos 0 excepto el último de la fila (rg A $\neq$ rg A_b)

Teorema: Si el sistema de m ecuaciones con n incógnitas es **compatible** y si ***r*** es el rango fila de la forma escalonada reducida de la matriz ampliada del sistema, entonces:
i) Si ***r*** < ***n*** el sistema tiene infinitas soluciones
ii) Si ***r*** = ***n*** el sistema tiene solución única

Corolario 1: Si en un sistema de ecuaciones lineales **compatible**, el **número de ecuaciones** (*m*) es **menor** que el **número de incógnitas** (*n*), entonces el sistema tiene **infinitas soluciones**

Corolario 2: Si en un sistema de ecuaciones lineales **homogéneo**, el **número de ecuaciones** (*m*) es **menor** que el **número de incógnitas** (*n*), entonces el sistema tiene **infinitas soluciones**

Ejercicio:

Hallar los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema de ecuaciones siguiente resulta:
i) compatible determinado,
ii) compatible indeterminado,
iii) incompatible

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + \left(\lambda^2 - 14\right) z = \lambda + 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & \lambda^2-14 & \lambda+2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_2-3F_1 \\ F_3\to F_3-4F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & \lambda^2-2 & \lambda-14 \end{array}\right) \sim_{F_3\to F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & \lambda^2-16 & \lambda-4 \end{array}\right)$$

Entonces:

- ✓ si $\lambda \neq 4$ y $\lambda \neq -4$, es $\lambda^2-16 \neq 0$ y $\lambda - 4 \neq 0$, es decir rg(A) = rg(A_b) = 3 (número de incógnitas) por lo tanto el sistema es **compatible determinado**
- ✓ si $\lambda = 4$, es $\lambda^2-16=0$ y $\lambda-4=0$, es decir rg(A) = rg(A_b) = 2 < 3 , por lo tanto el sistema es **compatible indeterminado**
- ✓ si $\lambda=-4$ es $\lambda^2-16=0$ pero $\lambda-4\neq 0$, es decir rg(A) $\neq$ rg(A_b), por lo tanto el sistema es in**compatible**

Método de Gauss-Jordan

Este método es similar al de triangulación de Gauss, salvo que presenta cierto refinamiento ya que consiste en llevar la matriz asociada al sistema, a la forma escalonada reducida.

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x-2y+3z=5 \\ 2x+4y-z=2 \end{cases}$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim_{F_1\to F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim_{F_2\to F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 16 & -9 & -4 \end{array}\right)$$

$$\sim_{F_2\to \frac{F_2}{16}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \sim_{F_1\to F_1+6F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \sim_{F_1\to F_1+6F_2}$$

$$\begin{cases} x+\frac{5}{8}z=\frac{3}{2} \\ y-\frac{9}{16}z=-\frac{1}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow x=\frac{3}{2}-\frac{5}{8}z \quad , \quad y=-\frac{1}{4}+\frac{9}{16}z$$

Por lo tanto las soluciones están dadas por $S=\left\{\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{8}z, -\frac{1}{4}+\frac{9}{16}z, z\right); z\in\mathbb{R}\right\}$

Observación:

Sea AX=B un sistema de ***n*** ecuaciones lineales con ***n*** incógnitas. Si la matriz A es inversible, entonces el sistema tiene solución única y es X = A^{-1}.B (**Método de la matriz inversa**)

Notar que si A es inversible, entonces det(A) $\neq$ 0, por lo tanto el sistema tiene solución única.