TRANSFORMACIONES LINEALES

Definición: Sean V y W $\mathbb{R}$ - espacios vectoriales. Una aplicación (función) $T: V \to W$ se dice una transformación lineal (en adelante t.l.) si verifica:

$T_1)$ $\quad T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \; \forall \, \vec{u},\vec{v} \in V$

$T_2)$ $\quad T(\lambda\vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) \; \forall \, \lambda \in \mathbb{R},\, \vec{v} \in V$

Consecuencias de la definición: Sea $T: V \to W$ una transformación lineal:

$T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ pues, si $\lambda = 0$, $\underbrace{T(0.\vec{v})}_{T(\vec{0}_V)} = \underbrace{0.T(\vec{v})}_{\vec{0}_W}$

$T(-\vec{v}) = -T(\vec{v}) \quad \forall \, \vec{v} \in V$ pues, $T(-\vec{v}) = T((-1).\vec{v}) = (-1).T(\vec{v}) = -T(\vec{v})$

$T(\vec{u}-\vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$ pues, $T(\vec{u}-\vec{v}) = T(\vec{u}+(-\vec{v})) = T(\vec{u}) + T(-\vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$

$T(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n) = \lambda_1 T(\vec{v}_1) + \lambda_2 T(\vec{v}_2) + \ldots + \lambda_n T(\vec{v}_n)$ se demuestra por inducción sobre n

Ejemplos:

$T = Id_V : V \to V \quad Id_V(\vec{x}) = \vec{x},\; \forall \, \vec{x} \in V$ es t.l. llamada transformación identidad

$T: V \to W \quad T(\vec{x}) = \vec{0}_W,\; \forall \, \vec{x} \in V$, es t.l. y se denomina la transformación nula

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: T(x_1,x_2) = (x_1,x_2,x_1+x_2)$ veamos si T es t.l.:

T_1) sean $\vec{u} = (x_1,x_2)$ y $\vec{v} = (y_1,y_2)$ vectores de $\mathbb{R}^2$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(x_1+y_1,\, x_2+y_2) = (x_1+y_1,\, x_2+y_2,\, x_1+y_1+x_2+y_2)$$
$$T(\vec{u})+T(\vec{v}) = T(x_1,\, x_2) + T(y_1,\, y_2) = (x_1,\, x_2,\, x_1+x_2) + (y_1,y_2,y_1+y_2) =$$
$$= (x_1+y_1,\, x_2+y_2,\, x_1+x_2+y_1+y_2)$$

por lo tanto $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, es decir, se verifica T_1

T_2) Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$T(\lambda\vec{u}) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_1 + \lambda x_2) = \lambda\,(x_1, x_2, x_1+x_2) = \lambda T(\vec{u})$$

por lo tanto se verifica T_2, luego T es t.l.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: f(x,y) = x \cdot y$, ¿es f una transformación lineal?

Para $\vec{u} = (x_1, y_1)$; $\vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2)\cdot(y_1+y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

$$f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = x_1y_1 + x_2y_2$$

Por lo tanto $f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \neq f(\vec{u}+\vec{v})$

Contraejemplo:

$$\vec{u} = (1,2)\,;\ \vec{v} = (3,4) \Rightarrow f(1,2) = 1.2 = 2\,;\ f(3,4) = 3.4 = 12$$

$$\left.\begin{array}{l} f((1,2)+(3,4)) = f(4,6) = 24 \\ f(1,2) + f(3,4) = 2+12 = 14 \end{array}\right\} \neq$$

Luego f no es t.l.

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : T(x,y) = (x+1, 2y, x+y)$$

$$T(0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$$

Pero, por lo visto en las consecuencias de la definición, toda transformación lineal verifica $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, es decir que debería ser $T(0,0) = (0,0,0)$.

Por lo tanto, T no es t.l.

Proposición:

Sean V y W $\mathbb{R}$ - espacios vectoriales y $T: V \to W$ una aplicación, T es una transformación lineal si y sólo si $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ y $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$ se verifica $T(\lambda\vec{u} + \lambda'\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \lambda' T(\vec{v})$

Demostración:

$\Rightarrow$) Si T es transformación lineal, satisface T_1 y T_2, entonces

$$T(\lambda\vec{u} + \lambda'\vec{v}) \underbrace{=}_{T_1} T(\lambda\vec{u}) + T(\lambda'\vec{v}) \underbrace{=}_{T_2} \lambda T(\vec{u}) + \lambda' T(\vec{v})$$

$\Leftarrow$) Si T cumple que $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ y $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$, $T(\lambda\vec{u} + \lambda'\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \lambda' T(\vec{v})$ veamos que satisface T_1 y T_2:

$$T_1)\quad \vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow T(\vec{u}+\vec{v}) = T(1.\vec{u} + 1.\vec{v}) \underbrace{=}_{hipótesis} 1.T(\vec{u}) + 1.T(\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$T_2)\quad \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V \Rightarrow T(\lambda.\vec{v} + 0.\vec{u}) = \lambda T(\vec{v}) + \underbrace{0.T(\vec{u})}_{\vec{0}} = \lambda T(\vec{v}) + \vec{0} = \lambda T(\vec{v})$$

Luego T es t.l.

Ejercicio: hallar, si es posible una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique

$$T(1,0,0)=(2,-1,2)\,; \quad T(1,1,0)=(0,0,0)\,; \quad T(1,1,1)=(1,1,1)$$

Como $\{(1;0;0),(1;1;0),(1;1;1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ tenemos que

$$(x;y;z)=\alpha(1;0;0)+\beta(1;1;0)+\gamma(1;1;1) \qquad \Rightarrow (x,y,z)=(\alpha+\beta+\gamma\,;\,\beta+\gamma\,;\,\gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\alpha+\beta+\gamma \\ y=\beta+\gamma \\ z=\gamma \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha = x-y\,;\ \beta=y-z\,;\ \gamma=z$$

Por lo tanto: $(x;y;z)=(x-y)\cdot(1;0;0)+(y-z)\cdot(1;1;0)+z\cdot(1;1;1)$

y aplicando T:

$$T(x;y;z)=(x-y)\underbrace{T(1,0,0)}_{(2,-1,2)}+(y-z)\underbrace{T(1,1,0)}_{(0,0,0)}+z\underbrace{T(1,1,1)}_{(1,1,1)}= \quad (x-y)(2,-1,2)+z(1,1,1)$$

por lo tanto $\quad T(x,y,z)=(2x-2y+z\,;-x+y+z\,;2x-2y+z)$ es la transformación lineal buscada.

Nota: las transformaciones lineales conservan las combinaciones lineales

Teorema: Sean V y W $\mathbb{R}$ - espacios vectoriales, $B=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n\}$ una base de V y $\vec{w}_1,\vec{w}_2,...,\vec{w}_n \in W$ vectores arbitrarios. Entonces **existe** una transformación lineal **única** $T:V\to W$ tal que $T(\vec{b}_i)=\vec{w}_i$ para $1\le i\le n$

Definición: Sean V y W $\mathbb{R}$ - espacios vectoriales y sea $T: V\to W$ una transformación lineal. Se dice que :

T es **monomorfismo** si T es inyectiva

T es **epimorfismo** si T es suryectiva

T es **isomorfismo** si T es biyectiva

Núcleo e imagen de una transformación lineal:

Definición: Sean V y W dos $\mathbb{R}$ - espacios vectoriales y sea $T: V\to W$ una transformación lineal:

Se llama **núcleo de T** y se nota *Nu* (T) al conjunto:

$$Nu\ (\mathrm{T}) = \left\{ \vec{v} \in V \;/\; \mathrm{T}\left(\vec{v}\right) = \vec{0}_W \right\} \subset \mathrm{V}$$

Se llama **imágen de T** y se nota *Im* (T) al conjunto:

$$Im\ (\mathrm{T}) = \left\{ \mathrm{T}\left(\vec{v}\right) / \ \vec{v} \in \mathrm{V} \right\} \subset \mathrm{W}$$

Observación: *Nu* (T) es un subespacio de V

Im (T) es un subespacio de W

Ejemplo: Sea $\mathrm{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $\mathrm{T}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1, x_2\right)$

Entonces: 1) $Nu\ (\mathrm{T}) = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathrm{T}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(0,0\right) \right\} =$

$= \left\{ \left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 = 0 \right\} = = \left\{ \left(0,0,x_3\right) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \overline{\left(0,0,1\right)} \right\}$ con dim (Nu (T)) = 1

2) $Im\ (\mathrm{T}) = \left\{ \mathrm{T}\left(x_1, x_2, x_3\right) / \left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \left(x_1, x_2\right) / \left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathbb{R}^2$

con dim (*Im* (T)) = 2

La siguiente proposición nos proporciona una manera de determinar si una transformación lineal es monomorfismo considerando el núcleo de la misma:

Proposición: Sea $\mathrm{T}: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ una transformación lineal, entonces *Nu* (T) = $\vec{0}_{\mathrm{V}}$ si y sólo si T es un **monomorfismo**.

Para buscar la imagen utilizamos la siguiente proposición:

Proposición: Sean V y W $\mathbb{R}$ - espacios vectoriales y sea $\mathrm{T}: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ una transformación lineal. Si $\left\{ \vec{\mathrm{v}}_1, \vec{\mathrm{v}}_2, \dots, \vec{\mathrm{v}}_s \right\}$ es un sistema de generadores de V, entonces $\left\{ \mathrm{T}\left(\vec{\mathrm{v}}_1\right), \mathrm{T}\left(\vec{\mathrm{v}}_2\right), \dots, \mathrm{T}\left(\vec{\mathrm{v}}_s\right) \right\}$ es un sistema de generadores de *Im* (T) . Es decir que si $\mathrm{V} = \left\{ \overline{\vec{\mathrm{v}}_1, \vec{\mathrm{v}}_2, \dots, \vec{\mathrm{v}}_s} \right\}$, entonces $\mathrm{Im}\left(\mathrm{T}\right) = \left\{ \overline{\mathrm{T}\left(\vec{\mathrm{v}}_1\right), \mathrm{T}\left(\vec{\mathrm{v}}_2\right), \dots \mathrm{T}\left(\vec{\mathrm{v}}_s\right)} \right\}$

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 - x_2 \ , -x_1 + x_2 \ , 2x_1 - 2x_2 + x_3\right)$ hallar una base y la dimensión de *Nu (f)* y de *Im (f)*

Calculemos *Nu (f)* :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow Nu(f) = \left\{ \overline{\left(1,1,0\right)} \right\} \Rightarrow \dim\left(Nu(f)\right) = 1$$

Calculemos *Im (f)* :

$\mathrm{B}=\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, entonces

$\mathrm{Im}(f)=\{\overline{f(1,0,0);\ f(0,1,0);\ f(0,0,1)}\}$

$f(1,0,0)=(1,-1,2)$ $\quad f(0,1,0)=(-1,1,-2)$ $\quad f(0,0,1)=(0,0,1)$, entonces

$\mathrm{Im}(f)=\{\overline{(1,-1,2);(-1,1,-2);(0,0,1)}\}$, para calcular una base de *Im* (*f*) analizamos si los tres vectores son l.i., como no lo son, la base de la imagen será $\mathrm{Im}(f)=\{\overline{(1,-1,2);(0,0,1)}\}$ por lo tanto $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$

Teorema de la dimensión:

Sean V y W $\mathbb{R}$ - espacios vectoriales, con V de dimensión finita y sea $\mathrm{T}:\mathrm{V}\to\mathrm{W}$ una transformación lineal, entonces $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{V})=\dim_{\mathbb{R}}(Nu(\mathrm{T}))+\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\mathrm{T}))$

Ejercicio:

Sean S y H los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por

$S=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_1-x_2=0\}$ y $H=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_3=0\}$.

Hallar una transformación lineal $\mathrm{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que T(*S*)= *H*

Solución:

Sabemos que para definir una transformación lineal basta con especificar los valores que la misma toma en una base de $\mathbb{R}^3$.

Consideremos entonces una base de *S*, por ejemplo $\{(1,1,0);(0,0,1)\}$ y extendámosla a una base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $\{(1,1,0);(0,0,1);(1,0,0)\}$

Por otro lado tenemos que $H=\{\overline{(1,0,0);(0,1,0)}\}$

Entonces definimos:

$\mathrm{T}(1,1,0)=(1,0,0)$
$\mathrm{T}(0,0,1)=(0,1,0)$
$\mathrm{T}(1,0,0)=(0,0,1)$ o cualquier otro vector

Por lo tanto:

$(x_1,x_2,x_3)=\alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)+\gamma(1,0,0)=(\alpha+\gamma,\alpha,\beta)$

de donde tenemos $\alpha = x_2 \quad \beta = x_3 \quad \gamma = x_1 - x_2$ por lo tanto la transformación lineal pedida será:

$$\mathrm{T}(x_1, x_2, x_3) = x_2\mathrm{T}(1,1,0) + x_3\mathrm{T}(0,0,1) + (x_1 - x_2)\mathrm{T}(1,0,0) = x_2(1,0,0) + x_3(0,1,0) + (x_1 - x_2)(0,0,1)$$

Es decir: $\mathrm{T}(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1 - x_2)$

Matriz asociada a una transformación lineal:

Sean V un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión n y W un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión m.
Sean $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ base de V y $B' = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \ldots, \overrightarrow{w_m}\}$ base de W.

Si $\mathrm{T}: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ es una transformación lineal , vamos a escribir

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(\vec{v}_1) &= \alpha_{11}\vec{w}_1 + \alpha_{21}\vec{w}_2 + \alpha_{31}\vec{w}_3 + \ldots + \alpha_{m1}\vec{w}_m \\
\mathrm{T}(\vec{v}_2) &= \alpha_{12}\vec{w}_1 + \alpha_{22}\vec{w}_2 + \alpha_{32}\vec{w}_3 + \ldots + \alpha_{m2}\vec{w}_m \\
\vdots \quad & \vdots \\
\mathrm{T}(\vec{v}_n) &= \alpha_{1n}\vec{w}_1 + \alpha_{2n}\vec{w}_2 + \alpha_{3n}\vec{w}_3 + \ldots + \alpha_{mn}\vec{w}_m
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}(\vec{v}_j) = \sum_i \alpha_{ij}\overrightarrow{w_i}$$

Entonces $\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ . \\ . \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}$ son las componentes de $\mathrm{T}(\vec{v}_1)$ en la base B' $\Rightarrow \left[\mathrm{T}(\overrightarrow{v_1})\right]_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ . \\ . \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}$

Para j=1, , n tenemos $\left[\mathrm{T}(\overrightarrow{v_j})\right]_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ . \\ . \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$

La matriz $A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & . & . & . & . & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \|\mathrm{T}\|_{BB'} \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

se denomina **la matriz de T en las bases B y B'**

Notación: Si B=B' escribimos $\|\mathrm{T}\|_{BB'} = \|\mathrm{T}\|_{B}$

Ejemplo: Sea $\mathrm{T}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por T(x , y) = (3x, 2y) y sean las bases $B=\{(1,1);(2,0)\}$ y $\mathrm{B}'=\{(1,0);(-1,1)\}$ hallar $\|\mathrm{T}\|_{BB'}$:

T(1,1) = (3,2) = 5 (1,0) + 2 (-1,1)

T(2,0) = (6,0) = 6 (1,0) + 0 (-1,1)

Entonces $\|\mathrm{T}\|_{BB'} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Nota: Sean V un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión n y W un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión m. Sean $B=\{\vec{\mathrm{v}}_1, \vec{\mathrm{v}}_2, \ldots, \vec{\mathrm{v}}_n\}$ base de V y $B'=\{\vec{\mathrm{w}}_1, \vec{\mathrm{w}}_2, \ldots, \vec{\mathrm{w}}_m\}$ base de W y $\mathrm{T}:\mathrm{V}\to\mathrm{W}$ es una transformación lineal.

Si $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots\ldots + \lambda_n\vec{v}_n$ y $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & . & . & . & . & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \|\mathrm{T}\|_{BB'}$ entonces se

verifica que: $\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & . & . & . & . & \alpha_{mn} \end{pmatrix}}_{mxn} . \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix}}_{\substack{nx1 \\ \text{coordenadas de } \vec{v} \\ \text{respecto de la base } B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ \beta_m \end{pmatrix}}_{\substack{mx1 \\ \text{coordenadas de } T(\vec{v}) \\ \text{respecto de la base } B'}}$

Es decir $\|\mathrm{T}\|_{BB'} . \left[\vec{v}\right]_B = \left[T(\vec{v})\right]_{B'}$

Observación: Sean V un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión *n* y W un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión *m*. Sean $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\}$ base de V y $B'=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\dots,\vec{w}_m\}$ base de W y

$T: V \to W$ es una transformación lineal , entonces $\operatorname{rg} \|T\|_{BB'} = \dim\left(\operatorname{Im}(T)\right)$

Ejemplo:

Dada $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ t.l. y las bases

$B=\{(1,1),(-1,0)\}$, $B'=\{(1,-1,1),(1,0,0),(-1,1,0)\}$ tales que $\|f\|_{BB'}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

calcular *f*(2,1)

Hallamos las componentes de $\vec{v}=(2,1)$ en la base B:

$(2,1)=\alpha(1,1)+\beta(-1,0)$ luego $\alpha=1$, $\beta=-1$

Calculamos $\|f\|_{BB'}.\left[\vec{v}\right]_B$:

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 3\end{pmatrix} \to$$ Componentes de $f(\vec{v})$ respecto de la base B´ , entonces

$$f(\vec{v}) = f(2,1)=1.(1,-1,1)+5.(1,0,0)+3.(-1,1,0)=(3,2,1)$$

Nota: Otra forma para calcular *f*(2,1) es hallar la forma explícita de *f* y aplicarla al vector (2,1):

Hallamos las componentes de $\vec{v}=(x_1,x_2)$ en la base B:

$(x_1,x_2)=\alpha(1,1)+\beta(-1,0)$ luego $\alpha=x_2$, $\beta=x_2-x_1$

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_2\\ x_2-x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ 2x_1+x_2\\ 2x_1-x_2\end{pmatrix} \to$$ Componentes de $f(x_1,x_2)$ respecto de la base B´

Por lo tanto la forma explícita de *f* es

$$f(x_1,x_2)=(x_1-x_2).(1,-1,1)+(2x_1+x_2).(1,0,0)+(2x_1-x_2).(-1,1,0)=$$
$$\therefore\quad f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_1,x_1-x_2)$$

entonces *f*(2,1) = (2+1, 2, 2-1) = (3,2,1)

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Definición: Sean V un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión finita y $T: V \to V$ una transformación lineal. Un número real λ se dice un **autovalor de T**, si existe un vector no nulo $\vec{v} \in V$ tal que $T(\vec{v}) = \lambda.\vec{v}$, el vector $\vec{v}$ se denomina autovector asociado a λ.

Ejemplo: Dada $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $T(x, y) = (2x, 0)$

T(0,1) =(0,0) = **0**. (0,1) T(3,0) = (6,0) = **2**.(3,0) T(5,0) = (10,0) = **2**.(5,0)

(5,0) y (3,0) son **autovectores** asociados al **autovalor 2**

(0,1) es **autovector** asociado al **autovalor 0**

Proposición: Sea V un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión finita n, $T: V \to V$ una t. l.
$V_\lambda = \left\{\vec{v} \in V / T(\vec{v}) = \lambda.\vec{v}\right\}$ es un subespacio de V.

Demostración:

- ✓ $\vec{0} \in V_\lambda$? si, ya que $T(\vec{0}_V) = \vec{0} = \lambda\vec{0}$

- ✓ $\vec{u}_1 \in V_\lambda \Rightarrow T(\vec{u}_1) = \lambda\vec{u}_1$ $\vec{u}_2 \in V_\lambda \Rightarrow T(\vec{u}_2) = \lambda\vec{u}_2$

$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in V_\lambda$? si, ya que $T\left(\overrightarrow{u_1 + u_2}\right) = T(\vec{u}_1) + T(\vec{u}_2) = \lambda\vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2 = \lambda\left(\overrightarrow{u_1 + u_2}\right)$

- ✓ $\vec{u}_1 \in V_\lambda \Rightarrow k.\vec{u}_1 \in V_\lambda$, $k \in \mathbb{R}$? si, ya que
  $\vec{u}_1 \in V_\lambda \Rightarrow T(\vec{u}_1) = \lambda\vec{u}_1 \Rightarrow T(k\vec{u}_1) = kT(\vec{u}_1) = k\lambda\vec{u}_1 = \lambda(k\vec{u}_1)$

  Por lo tanto V_λ es subespacio de V

Observar que al ser V_λ un subespacio de V, podemos calcular generadores, bases y dimensión del mismo.

Cálculo de autovalores y autovectores:

Proposición: Si V es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión finita n, $T: V \to V$ y $A = \|T\|_B$ donde B es una base ordenada de V, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **autovalor** de T si y sólo si
$\det(A - \lambda.Id_n) = 0$

Demostración:

Sea $\vec{v}$ autovector asociado al autovalor λ. Si $\left[\vec{v}\right]_B = (x_1;x_2;...;x_n)$, tenemos

$$\|T\|_B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \text{A}. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \text{A}. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\text{A- } \lambda.Id_n). \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema homogéneo que tiene solución no trivial $\vec{v}$ si y sólo si $\det(\text{A} - \lambda.Id_n) = 0$

Definición: El polinomio $\det(\text{A} - \lambda.Id_n)$ es denominado **polinomio característico de T**.

Observación: Las raíces reales del polinomio característico, si las tiene, son los autovalores.

Ejemplo: Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\|T\|_C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\det(\text{A} - x.Id_3) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & -1 \\ 2 & 2-x & -1 \\ 2 & 2 & 0-x \end{vmatrix} = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = -(x-1).(x-2)^2$$

Las raíces del polinomio obtenido, son los **autovalores**: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2$

Buscamos los **autovectores**:

Asociados a $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 3-1 & 1 & -1 \\ 2 & 2-1 & -1 \\ 2 & 2 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

que es equivalente a $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad y=0, \quad z=2x$

por lo tanto $\mathrm{V}_1=\{(x,0,2x)\,/\,x\in\mathbb{R}\}=\{\overline{(1,0,2)}\}$ es el subespacio de autovectores asociados al autovalor 1

Asociados a $\lambda_2=2$:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 & -1 \\ 2 & 2-2 & -1 \\ 2 & 2 & 0-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \end{cases}$$

Que es equivalente a $\begin{cases} x+y-z=0 \\ -2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=y, \quad z=2y$

Por lo tanto $\mathrm{V}_2=\{(\mathrm{y},\mathrm{y},2y)\,/\,\mathrm{y}\in\mathbb{R}\}=\{\overline{(1,1,2)}\}$ es el subespacio de autovectores asociados al autovalor 2.

Definición: Una transformación lineal $\mathrm{T}:\mathrm{V}\to\mathrm{V}$ se dice **diagonalizable** si existe una base B de V formada por autovectores de T.

Ejemplo: Dada $\mathrm{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *t.l.* $:\mathrm{T}(x,\,y,\,z)=(-y-z,\,x+2y+z,\,x+2y+z)$, calcular los autovalores y autovectores de T. ¿Es T diagonalizable?

Hallamos la matriz de T en la base canónica: $\|T\|_C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{Id}_3)=-\lambda.(\lambda-2).(\lambda-1)$,

entonces los autovalores de T son $\lambda_1=0,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

Por lo tanto $V_0=\{(-y,y,-y),\,y\in\mathbb{R}\}=\{\overline{(1,-1,1)}\}$

$$V_2=\{(-z,\mathrm{z},\mathrm{z}),\,\mathrm{z}\in\mathbb{R}\}=\{\overline{(-1,1,1)}\}$$

$$V_1=\{(-2y,y,y),\,y\in\mathbb{R}\}=\{\overline{(-2,1,1)}\}$$

$B = \{(1,-1,1),(-1,1,1),(-2,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, se tiene que la matriz asociada a T en la base B es $\|T\|_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ por lo tanto T es diagonalizable.

Proposición:
Si $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una *t.l.* entonces a dos autovalores distintos les corresponden autovectores *l.i.*

Demostración:

Si λ_1 y λ_2 son autovalores distintos con autovectores asociados $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente, entonces $T(\vec{v}_1) = \lambda_1\vec{v}_1$ y $T(\vec{v}_2) = \lambda_2\vec{v}_2$

Supongamos $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 = -\beta\vec{v}_2$

aplicando T : $T(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = T(\vec{0}) = \vec{0}$ entonces $\alpha T(\vec{v}_1) + \beta T(\vec{v}_2) = \vec{0}$

por lo tanto $\alpha.(\lambda_1\vec{v}_1) + \beta.(\lambda_2\vec{v}_2) = \vec{0} \Rightarrow \quad \lambda_1(-\beta\vec{v}_2) + \lambda_2\beta\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \quad (\lambda_2 - \lambda_1)\beta\vec{v}_2 = \vec{0}$

luego $\beta\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$

Proposición: Si $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una *t.l.* con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distintos dos a dos, con autovectores asociados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ respectivamente, entonces $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es l.i.

Corolario: Si $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una *t.l.* con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distintos dos a dos, entonces existe una base ordenada B tal que $\|T\|_B$ es diagonal. Es decir T es diagonalizable.

Observación: Si $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una *t.l.* con autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ no se puede asegurar si T es diagonalizable.