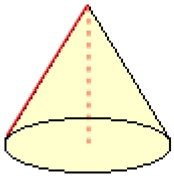
http://kambry.es/Apuntes%20Web/Paginas%20web%20de%20Matematicas/Analisis_Algebra/matem/matematica/Conicas.htm

Cónicas



Las figuras que se van a estudiar, todas ellas conocidas con el nombre genérico de cónicas, se pueden obtener como intersección de una superficie cónica con un plano. Lamamos superficie cónica de revolución a la superficie engendrada por una línea recta que gira alrededor de un eje manteniendo un punto fijo sobre dicho eje; mientras que denominamos simplemente Cónica a la curva obtenida al cortar esa superficie cónica con un plano. las diferentes posiciones de dicho plano nos determinan distintas curvas: *circunferencia*, *elipse*, *hipérbola* y *parábola*.

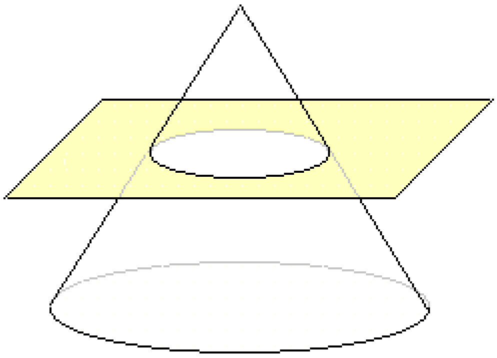
Un Poco de Historia: El estudio de las cónicas tiene su origen en el libro de Apolonio de Perga, *Cónicas*, en el cual se estudian las figuras que pueden obtenerse al cortar un cono cualquiera por diversos planos. Previamente a este trabajo existían estudios elementales sobre determinadas intersecciones de planos perpendiculares a las generatrices de un cono, obteniéndose elipses, parábolas o hipérbolas según que el ángulo superior del cono fuese agudo, recto u obtuso, respectivamente. Si bien no disponía de la geometría analítica todavía, Apolonio hace un tratamiento de las mismas que se aproxima mucho a aquélla. Los resultados obtenidos por Apolonio fueron los únicos que existieron hasta que Fermat y Descartes, en una de las primeras aplicaciones de la geometría analítica, retomaron el problema llegando a su casi total estudio, haciendo siempre la salvedad de que no manejaban coordenadas negativas, con las restricciones que esto impone.

La importancia fundamental de las cónicas radica en su constante aparición en situaciones reales:

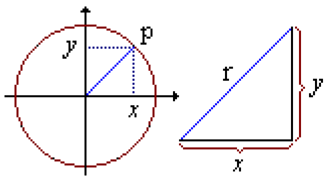
- La primera ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas dice que éstos siguen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Es muy posible que Newton no hubiese podido descubrir su famosa ley de la gravitación universal de no haber conocido ampliamente la geometría de las elipses.
- La órbita que sigue un objeto dentro de un campo gravitacional constante es una parábola. Así, la línea que describe cualquier móvil que es lanzado con una cierta velocidad inicial, que no sea vertical, es una parábola.
- Esto no es realmente exacto, ya que la gravedad no es constante: depende de la distancia del punto al centro de la Tierra. En realidad la curva que describe el móvil (si se ignora el rozamiento del aire) es una elipse que tiene uno de sus focos en el centro de la Tierra.

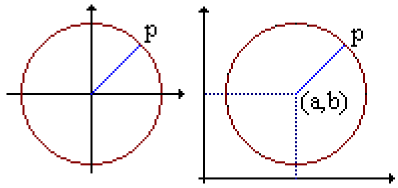
Una cónica puede considerarse como el resultado de cortar una superficie cónica con un plano; o como el lugar geométrico de los puntos del plano tal que la razón de sus distancias a un punto y a una recta es constante; o bien puede darse de ella una definición específica, que es lo que se va a desarrollar en este tema.

Circunferencia: Se denomina circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. El radio de la circunferencia es la distancia de un punto cualquiera de dicha circunferencia al centro.



Ecuación analítica de la circunferencia: si hacemos coincidir el centro con el origen de coordenadas, las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia (x, y) determina un triángulo rectángulo, y por supuesto que responde al teorema de Pitágoras: $r^2 = x^2 + y^2$. Puesto que la distancia entre el centro (a, b) y uno cualquiera de los puntos (x, y) de la circunferencia es constante e igual al radio r tendremos que: $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$ Llamada canónica podemos desarrollarla resolviendo los cuadrados (trinomio cuadrado perfecto) y obtenemos





$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by - r^2 = 0.$$

Si reemplazamos $-2a = D$; $-2b = E$; $F = a^2 + b^2 - r^2$ tendremos que:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ejemplo: Si tenemos la ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$

Entonces tenemos que: $D = 6 \Rightarrow 6 = -2a \Rightarrow a = -3$

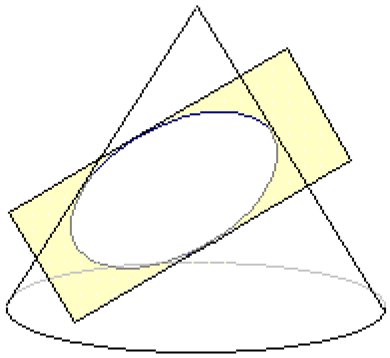
$E = -8 \Rightarrow -8 = -2b \Rightarrow b = 4$

El centro de la circunferencia es $(-3, 4)$. Hallemos el radio

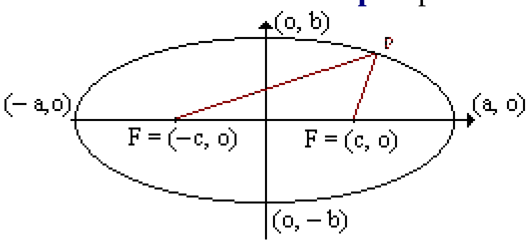
$F = (-3)^2 + 4^2 - r^2 \Rightarrow -11 = (-3)^2 + 4^2 - r^2 \Rightarrow r = 6$

La ecuación de la circunferencia queda: $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$

Elipse: Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman focos de la elipse.

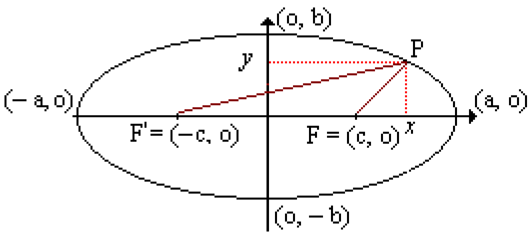


Ecuación analítica de la elipse: para simplificar la explicación ubiquemos a los focos sobre el eje de las x, situados en los puntos F (c,0) y F' (– c,0). Tomemos un punto cualquiera P de la elipse cuyas coordenadas son (x, y). En el caso de la elipse la suma de las distancias entre PF y PF' es igual al doble del radio sobre el eje x. Entonces: PF + PF' = 2a.



Aplicando Pitágoras tenemos que:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$



Elevamos al cuadrado ambos miembros para sacar las raíces y desarrollamos los cuadrados (ver operación) queda finalmente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si la elipse estuviese centrada en un punto cualquiera (p, q) la ecuación debería de ser: $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$

Si desarrollamos los cuadrados obtendremos que: $b^2x^2 + a^2y^2 – 2xpb^2 – 2yqa^2 + p^2b^2 + q^2a^2 – a^2b^2 = 0$

Si hacemos: $A = b^2$

$B = a^2$

$C = – 2pb^2$

$D = – 2qa^2$

$E = p^2b^2 + q^2a^2 – a^2b^2$

tendremos la ecuación: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, donde podemos comprobar que es igual que la de la circunferencia excepto que los términos A y B no tienen porqué ser iguales.

Ejemplo: Si tenemos la ecuación $4x^2 + 9y^2 + 24x – 8y + 81 = 0$

Entonces tenemos que: $A = 4 \Rightarrow 4 = b^2 \Rightarrow b = 2$; $B = 9 \Rightarrow 9 = a^2 \Rightarrow a = 3$

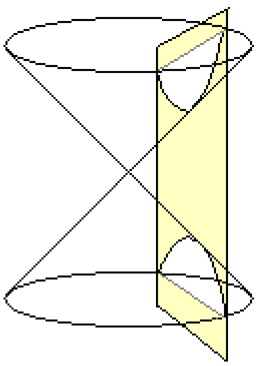
Los radios de la elipse son: sobre el eje x = a = 3; sobre el eje y = b = 2. Hallemos en centro (p, q).

$C = 24 \Rightarrow 24 = – 2pb^2 \Rightarrow p = – 3$
$D = – 54 \Rightarrow – 54 = – 2qa^2 \Rightarrow q = 3$

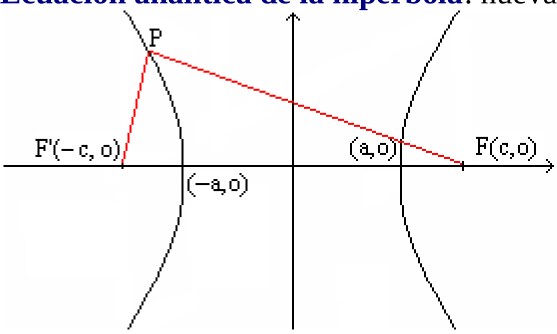
El centro es, entonces, (p, q) = (– 3, 3). Para verificar que se trate de una elipse calculemos E que debe tener el valor de 81. $E = p^2b^2 + q^2a^2 – a^2b^2 = 81$

La ecuación de la elipse queda: $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

Hipérbola: Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias entre dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman focos de la hipérbola .



Ecuación analítica de la hipérbola: nuevamente ubiquemos los focos sobre el eje x, F = (c,0) y F' = (– c,0), y tomemos un punto cualquiera P = (x, y) de la hipérbola. En este caso, la diferencia de las distancias entre PF y PF' es igual al doble de la distancia que hay entre el centro de coordenadas y la intersección de la hipérbola con el eje x. Entonces tendremos que: PF – PF' = 2a



$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y procediendo matemáticamente podemos llegar a esta expresión: $(c^2 - a^2).\ x^2 - a^2y^2 - (c^2 - a^2)\ a^2 = 0$ (los cálculos los dejo por tu cuenta pero puedes guiarte con el desarrollo que hicimos para la elipse). Nuevamente a partir del dibujo y aplicando Pitágoras podemos obtener que $c^2 = a^2 + b^2$ y por lo tanto la ecuación nos queda: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Dividiendo cada término por a^2b^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si la hipérbola estuviese centrada en un punto cualquiera (p, q) la ecuación debería de ser: $\dfrac{(x-p)^2}{a^2} - \dfrac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

Si desarrollamos los cuadrados obtendremos que: $b^2x^2 - a^2y^2 - 2xpb^2 + 2yqa^2 + p^2b^2 - q^2a^2 - a^2b^2 = 0$

Si hacemos: $A = b^2$

$B = - a^2$

$C = - 2pb^2$

$D = 2qa^2$

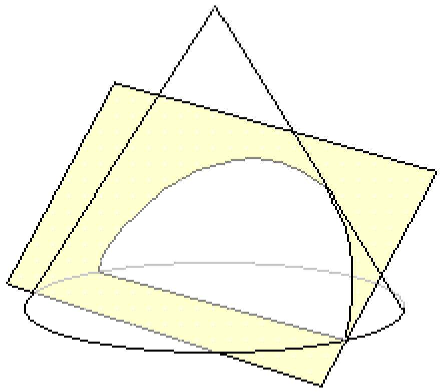
$E = p^2b^2 - q^2a^2 - a^2b^2$

tendremos la ecuación: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$, donde podemos comprobar que es igual que la de la circunferencia, o una elipse, excepto que los términos A y B no tienen porqué ser iguales.

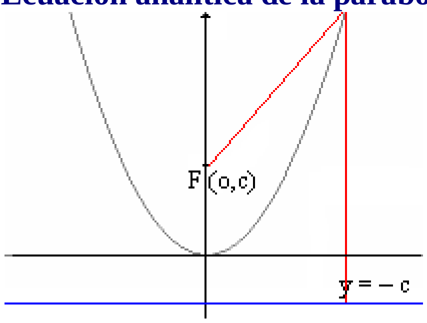
Asíntotas: son rectas que jamás cortan a la hipérbola, aunque se acercan lo más posible a ella. Ambas deben pasar por el "centro" (p, q)

Las ecuaciones de las asíntotas son: $\begin{cases} y = \dfrac{b}{a}x + \left(q - \dfrac{b}{a}.p\right) \\ y = -\dfrac{b}{a}x + \left(q + \dfrac{b}{a}.p\right) \end{cases}$

Parábola: Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz .



Ecuación analítica de la parábola: Supongamos que el foco esté situado en el punto (0,c) y la directriz es la recta $y = -$ c, por lo tanto el vértice está en su punto medio (0,0), si tomamos un punto cualquiera P = (x , y) de la parábola y un punto Q = (x, – c) de la recta debe de cumplirse que: PF = PQ



$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y + c)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros: $x^2 = 4cy$

Si la parábola no tiene su vértice en (0,0) si no en (p, q) entonces la ecuación sería: $(x-p)^2 = 4c(y - q)$

desarrollando la ecuación tendremos: $x^2 + p^2 - 2xp - 4cy + 4cq = 0$

Si hacemos D = – 2p

E = – 4c

F = p^2 + 4cq

obtendremos que es: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$, en la que podemos observar que falta el término de y^2.

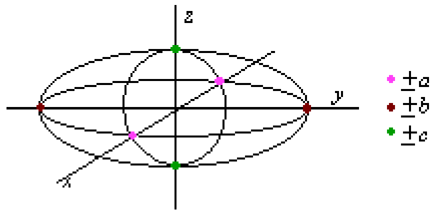
Observación: es de destacar que el término $x\,y$ no aparece, la razón es que se ha supuesto que los ejes de simetría de las cónicas son paralelos a los ejes de coordenadas; en caso contrario aparecería este término, que como es lógico dependerá del ángulo de inclinación de los ejes.

Cuádricas:

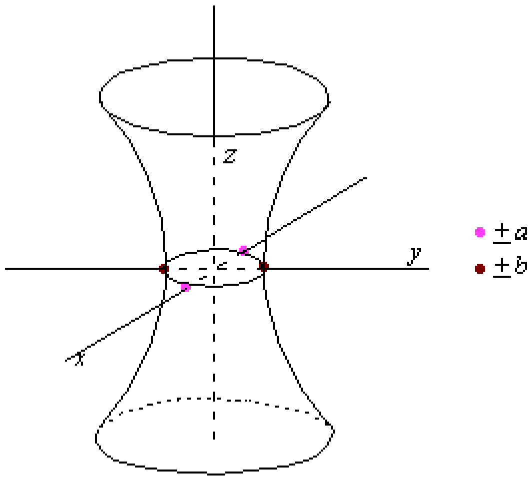
$$
\text{Cuádricas}\begin{cases}
\text{Con Centro}\begin{cases}\text{Elipsoide}\\ \text{Hiperboloide de}\begin{cases}\text{una hoja}\\ \text{dos hojas}\end{cases}\end{cases}\\
\text{Sin Centro}\begin{cases}\text{Paraboloide}\begin{cases}\text{Elíptico}\\ \text{Hiperbólico}\end{cases}\end{cases}\\
\text{Degeneradas}\begin{cases}\text{Superficies}\begin{cases}\text{Cilíndricas}\\ \text{Cónicas}\end{cases}\end{cases}
\end{cases}
$$

Cuádricas con centro:

Elipsoide: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$



1. Intersección a los ejes: $x \to \pm a$, $y \to \pm b$, $z \to \pm c$
2. Simétrico: $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$
3. La intersección con los planos de los ejes son elipses
4. La intersección de un plano paralelo al de los ejes determina una elipse ó dos puntos (elipse degenerada)
5. En caso que $a = b$ (para valores de z menores de c) $\Rightarrow$ elipsoide de revolución.
6. En caso que $a = b = c \Rightarrow$ Superficie esférica de radio "a": $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

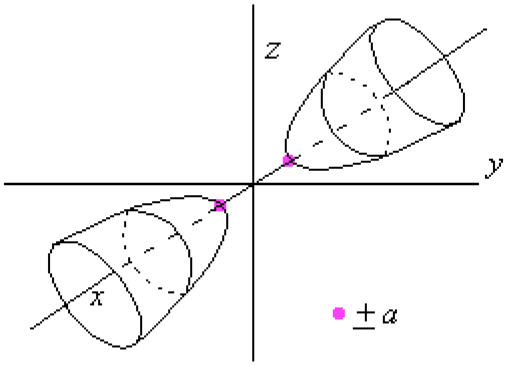


Hiperboloide de una hoja: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

1. Intercepta a los ejes: $x \to \pm a$, $y \to \pm b$, pero no corta el eje z (situado a lo largo del eje z)
2. Simétrico respecto a los planos, ejes y centro.
3. La intersección con plano *xy* determina una elipse, plano "*xz*" y "*yz*" determinan hipérbolas.
4. La intersección con un plano paralelo al plano *xy* determina elipses. Los planos paralelos a *xz* y a *zy* determinan hipérbolas.

5. En caso que $a = b$ el plano paralelo a xy es una circunferencia $\Rightarrow$ hiperboloide de revolución.

Hiperboloide de dos hojas: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



1. Intercepta únicamente al eje $x \rightarrow \pm\, a$
2. Simétrico respecto a los planos, a los ejes y el centro de coordenadas.
3. La intersección con los planos xy, xz son hipérbolas
4. La intersección de un plano paralelo al de los planos xy, xz son hipérbolas.
5. La intersección con el plano zy (a lo largo de x) determina elipses para valores mayores que a y menores que $-a$. Dos puntos al ser iguales que a ó $-a$. Para valores menores, no hay intersección.
6. En caso que $a = b$, $b = c$ ó $c = a$, respectivamente, los hiperboloides se denominan de revolución.