NOCIONES BÁSICAS DE CÁLCULO PROPOSICIONAL

Se entiende por <u>proposición</u> a toda sentencia o expresión de la cual se puede predicar su veracidad (V) o falsedad (F).
Las proposiciones las denotamos con letras minúsculas p, q, r, ….
Por ejemplo:
Son proposiciones:
p: "si un número es divisible por 6, es también divisible por 3"
q: "el calor dilata los cuerpos"
r: "tres es un número par"
s: "hay $10^{10^{10}}-2$ estrellas en el universo" (en este caso desconocemos si es V o F, lo cual no significa que la sentencia no tenga un valor de verdad)

No son proposiciones:
"x+2 es múltiplo de 5"
"¿qué hora es?"
"dos cuadrados y un triángulo"

Conectivos lógicos: son las operaciones entre proposiciones y son los siguientes:

Negación: se simboliza $\sim(o\,-)$: $\sim p$ se lee "no p" o " no es cierto que p"
Conjunción: se simboliza $\wedge$: $p \wedge q$ se lee "*p* y *q*"
Disyunción: se simboliza $\vee$: $p \vee q$ se lee "*p* o *q*"
Implicación o condicional: se simboliza $\Rightarrow$: $p \Rightarrow q$ se lee "*p* implica *q*" o "si p, entonces q"
Doble implicación o equivalencia: se simboliza $\Leftrightarrow$: $p \Leftrightarrow q$ se lee "*p* si y sólo si *q*" es la conjunción de $p \Rightarrow q$ con $q \Rightarrow p$ ($p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$)

Para definir cada operación debemos determinar el valor de verdad de la proposición obtenida, a partir de los valores de verdad de las respectivas proposiciones que en dicha operación intervienen y lo hacemos mediante el uso de las "*tablas de verdad*". Por ejemplo, veamos la siguiente tabla de verdad referida a las proposiciones p y q :

Tablas de verdad

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$-(p \wedge q)$	$-(p \vee q)$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$
V	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V	V	V
		Conjunción	disyunción	Negación de $p \wedge q$	Negación de $p \vee q$	condicional	condicional	$p \Leftrightarrow q$

CONJUNTOS

Llamamos conjuntos a cualquier colección de objetos, a los que llamaremos *elementos*, pudiendo ser éstos de carácter concreto o abstracto.
Convenimos en utilizar letras mayúsculas para denotar los conjuntos y minúsculas para denotar los elementos, salvo que éstos sean, a su vez, conjuntos.

Para indicar que un determinado elemento pertenece a un conjunto utilizamos el símbolo $\in$, es decir que si el elemento *a* pertenece al conjunto A, lo escribimos: $a \in \mathrm{A}$.
En caso contrario, si el elemento *a* no pertenece al conjunto A, lo escribimos: $a \notin \mathrm{A}$

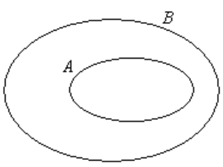
Para definir un conjunto hay que precisar cuáles son sus elementos y ello puede ser hecho en forma explícita, o sea enumerando cada uno de sus elementos (definición **por extensión**), o bien enunciando la o las propiedades que deben cumplir (definición **por comprensión**)

Ejemplos:

1) $A = \{x \,/\, x \text{ es un número natural impar}\}$, conjunto definido por comprensión.
2) $B = \{5, 10, 15, 20, a, b\}$, conjunto definido por extensión

Conjuntos especiales:
<u>Conjunto vacío</u>: Se simboliza con $\varnothing$ y es el conjunto que carece de elementos.
<u>Conjunto Universal:</u> Se denota, en general, con *U,* depende de la disciplina en estudio, está formado por todos los elementos que intervienen en el tema de interés.

<u>Inclusión de conjuntos</u>
Sean *A* y *B* conjuntos, decimos que *A* está incluído en *B* o que *A* es un subconjunto de *B*, y notamos $A \subset B$, si cada elemento de *A* es también un elemento de *B*, en símbolos: $A \subset B$ si y solo si $\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$
Si $A \subset B$ *y* $B \subset A$ los conjuntos *A* y *B* son iguales.

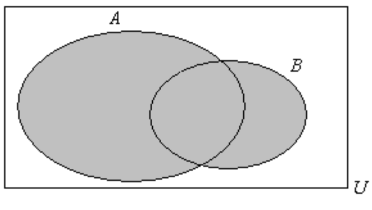


<u>Observación</u>: El conjunto vacío está incluído en cualquier otro conjunto: $\varnothing \subset A$ para cualquier conjunto *A.*
$\forall x : x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$ proposición verdadera porque el antecedente es falso.

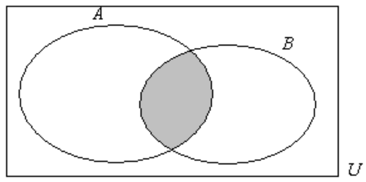
<u>Operaciones entre conjuntos:</u>

Sean *A* y *B* dos conjuntos en un conjunto universal *U.* Definimos:

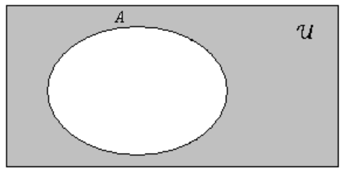
UNIÓN: $A \cup B = \{x \in U \,/\, x \in A \vee x \in B\}$



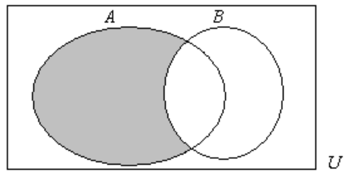
INTERSECCIÓN: $A \cap B = \{x \in U \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$



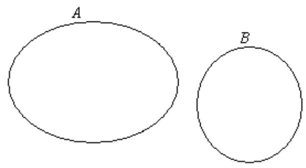
COMPLEMENTO: $A' = \{x \in U \,/\, x \notin A\}$



DIFERENCIA: $A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$



Observación: Dos conjuntos A y B se dicen *disjuntos* si $A \cap B = \phi$



Propiedades de las operaciones: Sean *A*, *B*, *C* subconjuntos de un conjunto universal *U*, se cumplen las siguientes propiedades:

i) *asociativa*: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

ii) *conmutativa*: $A \cup B = B \cup A$

iii) $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$

iv) $A \cup B = B$ *si y sólo si* $A \subset B$
en particular: $A \cup A = A$, $A \cup \phi = A$, $A \cup U = U$, $\forall A$

v) *asociativa*: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

vi) *conmutativa*: $A \cap B = B \cap A$

vii) $A \cap B \subset A \;\wedge\; A \cap B \subset B$

viii) $A \cap B = A$ *si y sólo si* $A \subset B$ en particular:
$A \cap A = A$, $A \cap \phi = \phi$, $A \cap \mathbf{U} = A$, $\forall A$

ix) $A'' = A$

x) $\varnothing' = U \;\wedge\; U' = \phi$

xi) Leyes de De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

xii) $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

Conjunto de partes:

Definición*:** Llamaremos ***conjunto de partes de un conjunto *A*, al conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de *A*. En símbolos $\mathcal{P}(A) = \{ X \,/\, X \subset A \}$

Observación*:** $\phi \subset A$ y $A \subset A$ $\forall A$, por lo tanto $\phi \in \mathcal{P}(A) \;\wedge\; A \in \mathcal{P}(A)$ $\forall A$. Por consiguiente, excepto en el caso en que $A = \phi$, $\mathcal{P}(A)$ tiene, al menos, dos elementos; en particular ***siempre es $\mathcal{P}(A) \neq \phi$.

$\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$, conjunto de un solo elemento, o ***unitario,*** puesto que el único subconjunto del conjunto ϕ, es él mismo.

Ejemplo:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Producto cartesiano:

***Definición*:** Sean los conjuntos A y B, llamamos *producto cartesiano* de A por B, al conjunto:

$$A \times B = \{(a, b) / \ a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo:

$$A = \{a, b\} \quad ; \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$
$$B \times A = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$$

Propiedades

i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$