NÚMEROS COMPLEJOS

La necesidad de crear nuevos conjuntos numéricos fue surgiendo a medida que se presentaban ecuaciones que no tenían solución dentro de los conjuntos ya conocidos. Si queremos resolver ecuaciones del tipo $x^2+1 = 0$, deberíamos hallar los valores de x cuyo cuadrado es -1, lo cual no es posible en el conjunto de los números reales pues el cuadrado de todo número real es mayor o igual que 0.
Es así como se introduce un nuevo conjunto numérico, el conjunto de los **números complejos:** $\mathbb{C}$

Definimos en $\mathbb{C}$ el número i, al que llamamos **unidad imaginaria**, como el número cuyo cuadrado *es -1:*

$$\boxed{i^2 = -1}$$

De este modo las soluciones de la ecuación planteada son:

$$\begin{cases} x_1 = i & pues \quad i^2 = -1 \\ x_2 = -i & pues \quad (-i)^2 = (-i).(-i) = i^2 = -1 \end{cases}$$

Definición:
Llamamos números complejos a los números de la forma $a+bi$ donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria:

Si z es un número complejo, entonces

$$z = a + bi$$

a es la **parte real** de *z* ← → *b* es la **parte imaginaria** de *z*

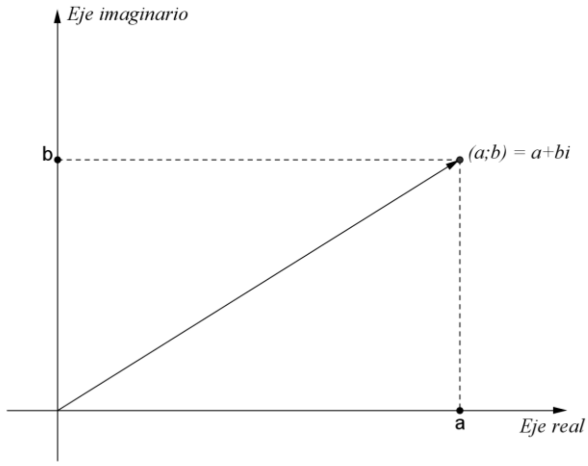
Ejemplos:
1.- El número complejo $5-4i$ tiene a 5 como parte real y a -4 como parte imaginaria
2.- El número complejo $4i$ tiene a 0 como parte real y a 4 como parte imaginaria. Este número, cuya parte real es 0, se denomina **imaginario puro.**
3.- El número complejo 5 tiene a 5 como parte real y a 0 como parte imaginaria, es un número complejo cuya parte imaginaria es 0, es decir, es un **número real**

Como vemos en el ejemplo 3, los números complejos cuya parte imaginaria es 0 son números reales. Es decir que
"el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales está incluido en el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos"

Representación gráfica:

Diagrama de Argand

Para representar gráficamente los números complejos utilizamos el llamado diagrama de Argand, similar al plano de dos dimensiones. En esta nueva representación, el número complejo $z = a + bi$ se representa en el plano mediante el punto de coordenadas $(a\,;b)$. El eje de abscisas se denomina ***eje real*** y el eje de ordenadas se denomina ***eje imaginario***. Así, a cada número complejo le corresponderá un punto en el plano y a cada punto del plano le corresponderá un número complejo.



Igualdad: Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias también lo son, es decir: $a+bi = c+di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Operaciones:

Dados $z = a+bi$ y $z' = a' + b'i$ serán:

SUMA: $z + z' = (a + a') + (b + b')i$

PRODUCTO:

$$z.z' = (a+bi).(a'+b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'\underbrace{i^2}_{-1} = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

Ejemplo: Para $z = 2+3i$ y $z' = 1-4i$:

$z + z' = (2+1) + (3 + (-4))i = 3 - i$ $\quad z - z' = (2-1) + (3-(-4))i = 1 + 7i$

$z.z' = (2+3i).(1-4i) = 2.1 + 2.(-4)i + 1.3i + 3.(-4)i^2 = (2.1 - 3.(-4)) + (2.(-4) + 1.3)i = 14 - 5i$

Propiedades de la suma:

Dados $z = a + bi$, $z' = c + di$, $z'' = e + gi$:

- Asociativa $\left[(a+bi)+(c+di)\right]+(e+gi) = (a+bi)+\left[(c+di)+(e+gi)\right]$

- Conmutativa $(a+bi)+(c+di) = (c+di)+(a+bi)$

- Elemento neutro: $0 = 0 + 0i$ es el elemento neutro para la suma. $(a+bi)+0 = (a+bi)$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$

- Elemento opuesto: $\forall z = a+bi \in \mathbb{C}$ existe su opuesto -z= $-a-bi$ tal que $z + (-z) = 0$

Propiedades del producto:

Asociativa $\left[(a+bi).(c+di)\right].(e+gi)=(a+bi).\left[(c+di).(e+gi)\right]$

Conmutativa $(a+bi).(c+di)=(c+di).(a+bi)$

Elemento neutro $(a+bi)\cdot(x+yi)=(a+bi) \quad \forall\, z=a+bi\in\mathbb{C}$

$(a+bi)\cdot(x+yi)=(ax-by)+(ay+bx)i$ es un sistema de ecuaciones lineales cuya solución es
$x=1 \quad y=0$

Elemento inverso: $\forall\, z\neq(0,0)\,\exists\, z^{-1}=(x'+y'\mathrm{i}): z\cdot z^{-1}=1$

$(a+bi)\cdot(x'+y'\mathrm{i})=(1+0\mathrm{i})\Rightarrow(ax'-by')+(ay'+bx')=(1+0\mathrm{i})$

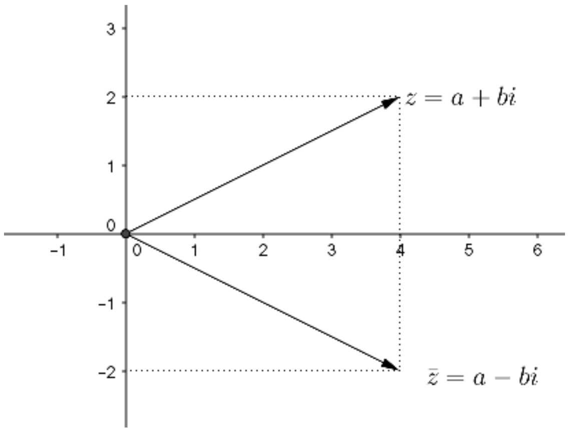
$x'=\dfrac{a}{a^2+b^2} \quad y'=\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ Entonces $(x'+y'\mathrm{i})=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{-b}{a^2+b^2}i\right)=z^{-1} \quad \forall\, z\neq 0$

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

Para todo $z, z', z''\in\mathbb{C}$, se verifica: $z\cdot(z'+z'')=z\cdot z'+z\cdot z''$

Conjugado de un número complejo:

Llamamos conjugado del número complejo $z=a+bi$, al número complejo $\overline{z}=a-bi$, cuya parte real es igual a la parte real de z y la parte imaginaria es la opuesta de la parte imaginaria de z.



Observación: si $z\in\mathbb{C}$, es tal que $z=a+bi$ y $z\neq 0$ tenemos que:

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\overline{z}}{\overline{z}}=\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$$

Por lo tanto podemos definir el **cociente entre dos números complejos**, diciendo que si z y z' son números complejos, $z'\neq 0$:

$$z:z'=\frac{z}{z'}=z\cdot\frac{1}{z'}=\frac{z.\overline{z'}}{z'.\overline{z'}} \qquad \text{si} \quad z'\neq 0$$

Ejemplo: Para $z=2+3i$ y $z'=1-4i$:

$z+z'=\left(2+1\right)+\left(3+(-4)\right)i=3-i \qquad z-z'=\left(2-1\right)+\left(3-(-4)\right)i=1+7i$

$z.z'=\left(2+3i\right).\left(1-4i\right)=2.1+2.(-4)i+1.3i+3.(-4)i^2=\left(2.1-3.(-4)\right)+\left(2.(-4)+1.3\right)i=14-5i$

$$z:z'=\frac{2+3i}{1-4i}=\frac{\left(2+3i\right).\left(1+4i\right)}{\left(1-4i\right).\left(1+4i\right)}=\frac{\left(2-12\right)+\left(8i+3i\right)}{\left(1\right)^2+\left(-4\right)^2}=\frac{-10+11i}{17}=-\frac{10}{17}+\frac{11}{17}i$$

Propiedades de la conjugación: Para z , $z' \in \mathbb{C}$ ·

i. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
ii. $\overline{z.z'}=\overline{z}\,.\,\overline{z'}$
iii. $\overline{z}=0 \iff z=0$
iv. $\overline{z}=z \iff z\in\mathbb{R}$
v. $z+\overline{z}=2\,Re(z)$
vi. $z-\overline{z}=2i\,Im(z)$
vii. Si $z\neq 0$, $\overline{z}^{\,-1}=\overline{z^{-1}}$
viii. $\overline{\overline{z}}=z$

Norma de un número complejo:

Definición: sea $z=a+bi$ llamamos noma de z al elemento $\mathrm{N}\left(z\right)=z\cdot\overline{z}=\left(a+bi\right)\cdot\left(a-bi\right)=a^2+b^2$

Propiedades de la norma:

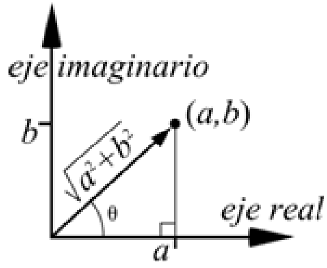
- $\mathrm{N}\left(z\cdot z'\right)=\mathrm{N}\left(z\right)\cdot\mathrm{N}\left(z'\right)$
- $z\neq 0\Rightarrow \mathrm{N}\left(z^{-1}\right)=\left(\mathrm{N}\left(z\right)\right)^{-1}$
- $\mathrm{N}\left(z\right)\geq\left(\mathrm{Re}\left(z\right)\right)^2 \wedge \mathrm{N}\left(z\right)\geq\left(\mathrm{Im}\left(z\right)\right)^2$
- $\mathrm{N}\left(z\right)=\mathrm{N}\left(\overline{z}\right)$

Módulo de un número complejo:

Definición: si $z \in \mathbb{C}$ llamamos módulo de z al número real $|z| = \sqrt{\mathrm{N}(z)}$

Recordamos $\mathrm{N}(z) = z \cdot \overline{z}$

$$z = a + bi \Rightarrow \mathrm{N}(z) = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Ejemplos:

$$|1+3i| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \quad |1-3i| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$|2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \quad |-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2 \quad |0| = 0$$

Propiedades del módulo: Para z , $z' \in \mathbb{C}$

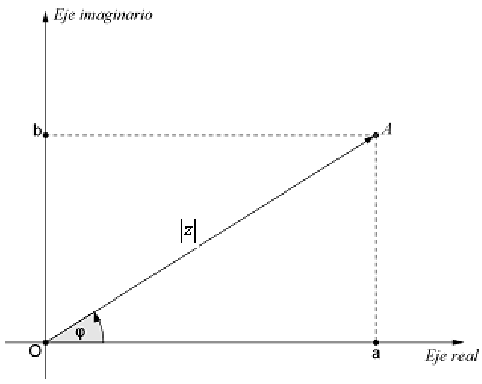
i. $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
ii. $|z.z'| = |z| . |z'|$
iii. $|\overline{z}| = |z|$
iv. $|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z) \quad \wedge \quad |z| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$.
v. $|z|^{-1} = |z^{-1}|$ para $z \neq 0$.
vi. Cuando $z \neq 0$, $z^{-1} = \overline{z} \Leftrightarrow |z| = 1$.
vii. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Desigualdad Triangular o de *Minkowski*).

Argumento principal de un número complejo:

Todo número complejo queda unívocamente determinado por su parte real y su parte imaginaria, pero además tenemos otra manera de caracterizarlos: por su módulo y por la medida del ángulo que determinan el eje x y la semirrecta que tiene origen en el origen de coordenadas y que pasa por el punto que define tal complejo. Este número real toma su valor en el intervalo $[0, 2\pi)$, y se denomina *argumento principal* del número complejo, que notamos arg (z) = φ .

Para el número complejo $z = a + bi$, teniendo en cuenta $|z|$, el argumento φ y las relaciones : $\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}$ y $sen\,\varphi = \dfrac{b}{|z|}$, de donde

$a = |z|\cos\varphi \quad y \quad b = |z|\, sen\,\varphi$



resultan la **Forma Trigonométrica del complejo *z:***

$$z = |z|(\cos\varphi + i\, sen\varphi)$$

y la **Forma polar del complejo *z:*** $|z|\underline{|\varphi}$

Ángulos congruentes módulo 2π :

$$\alpha \equiv \beta \quad \mathrm{mod}(2\pi) \Leftrightarrow \exists\, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}: \alpha - \beta = 2\mathrm{k}\pi$$

Observación: *para* $z = 0$ no se define argumento

• Ejemplo: $\frac{9}{4}\pi \equiv x \quad \mathrm{mod}(2\pi) \quad \frac{9}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = 2\pi \Rightarrow \frac{9}{4}\pi \equiv \frac{\pi}{4} \quad \mathrm{mod}(2\pi)$

Producto de complejos dados en forma trigonométrica:

Sea $z = |z|\left(cos\theta + i\ sen\theta\right)$ y $z' = |z'|\left(cos\theta' + i\ sen\theta'\right)$

$z \cdot z' = |z|\left(cos\theta + i\ sen\theta\right) \cdot |z'|\left(cos\theta' + i\ sen\theta'\right) =$

$|z| \cdot |z'| \cdot (cos\theta\ cos\theta' + i\ cos\theta\ sen\theta' + i\ sen\theta\ \cos\theta' + \mathrm{i}^2 sen\theta\ sen\theta') =$

$|z| \cdot |z'| \cdot \left(\left(cos\theta\ cos\theta' - sen\theta\ sen\theta'\right) + i\left(cos\theta\ sen\theta' + sen\theta\ cos\theta'\right)\right) =$

$= |z.z'| \cdot \left(cos\left(\theta + \theta'\right) + i\ sen\left(\theta + \theta'\right)\right)$

Expresando en forma polar los complejos z y z’:

$z = |z|\,\underline{|\theta} \qquad z' = |z'|\,\underline{|\theta'}$

Tenemos el **producto en forma polar**: $z.z' = |z|.|z'|\,\underline{|\theta + \theta'}$

Generalizando:

Si $z_1 = |z_1|\,\underline{|\theta_1}$, $z_2 = |z_2|\,\underline{|\theta_2}$, ..., $z_n = |z_n|\,\underline{|\theta_n}$ entonces $z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|\,\underline{|\theta_1 + \ldots + \theta_n}$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} z_i = \prod_{i=1}^{n} |z_i|\,\underline{\Big|\sum_{i=1}^{n}\theta_i}$$

Cociente de complejos dados en forma polar:

$$z,\ z' \in \mathbb{C}, z' \neq 0 \qquad z = |z|\,\underline{|\theta} \qquad z' = |z'|\,\underline{|\theta'}$$

$\frac{z}{z'} = z'' \Rightarrow \frac{|z|}{|z'|} = |z''| \quad como\ z = z' \cdot z'' \Rightarrow \theta \equiv \theta' + \theta'' \quad \mathrm{mod}(2\pi) \Rightarrow \theta'' \equiv \theta - \theta' \quad \mathrm{mod}(2\pi)$

$$z'' = \frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}\,\underline{|\theta - \theta'} \quad *$$

*El argumento del cociente es $\theta - \theta'$ o su congruente menor que un giro.

Potencia de exponente natural de un complejo dado en forma trigonométrica:

$z = |z|\underline{\lfloor \theta} \quad ; \quad z^n = |z|^n \underline{\lfloor n\theta}$

Demostración por inducción $\quad \mathrm{P}(n): z^n \overset{?}{=} |z|^n \underline{\lfloor n\theta} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1°) $\mathrm{P}(1): \quad z^1 \overset{?}{=} |z|^1 \underline{\lfloor 1\cdot\theta} \quad :$

$z^1 = z = |z|\underline{\lfloor \theta} \qquad |z|^1 \underline{\lfloor 1\cdot\theta} = |z|\underline{\lfloor \theta} \quad \therefore\ \mathrm{P}(1)$ esV

2°) $\mathrm{P}(n) \overset{\text{v?}}{\Rightarrow} \mathrm{P}(n+1)$ Suponemos $\mathrm{P}(n): z^n = |z|^n \underline{\lfloor n\theta}$ esV.

Debemos probar que $\mathrm{P}(n+1)$ esV:

$\mathrm{P}(n+1): \quad z^{n+1} \overset{?}{=} |z|^{n+1} \underline{\lfloor (n+1)\theta}$

$z^{n+1} = z^n \cdot z \overset{\text{HI}}{=} |z|^n \underline{\lfloor n\theta} \cdot |z|\underline{\lfloor \theta} = |z|^n \cdot |z| \underline{\lfloor n\theta + \theta} = |z|^{n+1} \underline{\lfloor (n+1)\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{P}(n+1)$ esV $\quad \therefore \quad \mathrm{P}(n)$ esV $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplo: $z = 1+i$ calcular z^{10} $\quad |z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$sen(\theta) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad (cos(\theta) > 0 \quad \wedge \quad sen(\theta) > 0) \Rightarrow \theta \in$ I cuadrante del planodeArgand

$\theta = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}\underline{\lfloor \tfrac{\pi}{4}} \quad z^{10} = |z|^{10} \underline{\lfloor 10\cdot\tfrac{\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} \underline{\lfloor \tfrac{5}{2}\pi} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} \underline{\lfloor \tfrac{5}{2}\pi} = 2^5 \underline{\lfloor \tfrac{5}{2}\pi} = 32 \underline{\lfloor \tfrac{5}{2}\pi}$

Igualdad de dos números complejos dados en forma polar:

<u>Definición:</u> si $z_1 = |z_1|\left(cos(\theta_1) + i\ sen(\theta_1)\right)$ y $z_2 = |z_2|\left(cos(\theta_2) + i\ sen(\theta_2)\right)$

diremos que $z_1 = z_2 \ si \ |z_1| = |z_2| \quad \wedge \quad \theta_1 \equiv \theta_2 \mod(2\pi)$

Cálculo del inverso de un número complejo dado en forma polar:

Si $z \neq 0,\ z = |z|\underline{\lfloor \theta}$, entonces $\quad z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1\underline{\lfloor 0}}{|z|\underline{\lfloor \theta}} = \dfrac{1}{|z|}\underline{\lfloor 0-\theta} = |z|^{-1}\underline{\lfloor -\theta} = |z|^{-1}\underline{\lfloor 2\pi-\theta}$

Potencias enteras de un número complejo:

Si $z = |z|\underline{\lfloor \theta}$, $\mathrm{p} \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$ entonces $z^{-\mathrm{p}} = \left[\left(|z|\underline{\lfloor \theta}\right)^{-1}\right]^{\mathrm{p}} = \left(|z|^{-1}\underline{\lfloor -\theta}\right)^{\mathrm{p}} = \left(|z|^{-1}\right)^{\mathrm{p}} \underline{\lfloor \mathrm{p}(-\theta)} = |z|^{-\mathrm{p}} \underline{\lfloor -\mathrm{p}\theta}$

Fórmula de De Moivre: $z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}, \quad z = |z|\underline{\lfloor \theta} \Rightarrow z^k = |z|^k \underline{\lfloor k\theta}$

Ejemplo: Si $z = 2_{\lfloor \frac{5}{4}\pi}$ calcular z^{-3} :

$$z^{-3} = 2^{-3}_{\lfloor -3\cdot\frac{5}{4}\pi} = \frac{1}{8}_{\lfloor -\frac{15}{4}\pi} = \frac{1}{8}_{\lfloor \frac{\pi}{4}}$$

si queremos expresarlo en forma binómica:

$$\frac{1}{8}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\ sen\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{16}i$$

Resumen de las propiedades de argumento:

Sean $z, z' \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}$

En términos de congruencia	En términos de igualdad
$arg(z\cdot z') \equiv arg(z) + arg(z') \bmod (2\pi)$	$arg(z\cdot z') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi$
$arg(z : z') \equiv arg(z) - arg(z') \bmod (2\pi)$	$arg(z : z') = arg(z) - arg(z') + 2k\pi$
$arg(z^n) \equiv n\ arg(z) \bmod (2\pi)$	$arg(z^n) = n\ arg(z) + 2k\pi$

en particular $arg(z^{-1}) \equiv -arg(z) \bmod (2\pi)$ ó $arg(z^{-1}) = -arg(z) + 2\pi$

Argumento del conjugado de un número complejo:

$arg(\overline{z}) = ?$

Recordamos: $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$

tomemos argumento: $arg\left(|z|^2\right) = arg(z) + arg(\overline{z}) + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = arg(z) + arg(\overline{z}) + 2k\pi \Rightarrow arg(\overline{z}) = -arg(z) + 2\pi$

Ejemplo: Determinar y representar en el plano complejo todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:

$arg(z) = arg\left(3\overline{z}^2\right)$ y $|z| = 2$

$z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4$

$arg(z) = arg(3\bar{z}^2) \Rightarrow arg(z) = arg(3) + arg(\bar{z}^2) + 2k\pi$

$arg(z) = arg(3) + arg(\bar{z}^2) + 2k\pi \Rightarrow arg(z) = 0 + 2\, arg(\bar{z}) + 2k\pi$

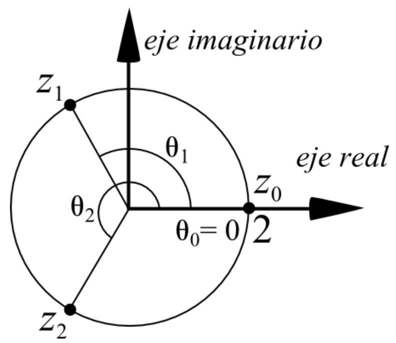
$\Rightarrow arg(z) = 2(-arg(z)) + 2k\pi \Rightarrow arg(z) = -2\, arg(z) + 2k\pi$

$\Rightarrow 3\, arg(z) = 2k\pi \Rightarrow arg(z) = \theta_k = \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k = 0,1,2$

$si\ k = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$,

$si\ k = 1 \Rightarrow \theta_1 = \dfrac{2}{3}\pi$

$si\ k = 2 \Rightarrow \theta_2 = \dfrac{4}{3}\pi$



Respuesta: los z que cumplen las condiciones anteriores son:

$z_0 = 2_{\underline{|0}}$, $z_1 = 2_{\underline{|\frac{2}{3}\pi}}$ y $z_2 = 2_{\underline{|\frac{4}{3}\pi}}$

Raíces n-ésimas de un complejo:

Definición:

Dado $w \in \mathbb{C}, n > 1, n \in \mathbb{N}$ se denomina raíz n-ésima de w a todo número complejo z tal que $z^n = w$

Cálculo de todas las raíces n-ésimas de un complejo w dado en forma polar:

$z = |z|_{\underline{|\varphi}}$ $z^n = \left(|z|_{\underline{|\varphi}}\right)^n = |w|_{\underline{|\theta}}$ son incógnitas $|z|$ y φ

Aplicando De Moivre tenemos: $|z|^n{}_{\underline{|n\varphi}} = |w|_{\underline{|\theta}}$

$$\begin{cases} |z|^n = |w| \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

$\varphi_0 = \dfrac{\theta}{n}$; $\varphi_1 = \dfrac{\theta + 2\pi}{n}$; $\varphi_2 = \dfrac{\theta + 4\pi}{n}$; .....; $\varphi_{n-1} = \dfrac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$; $\varphi_n = \dfrac{\theta}{n} + 2\pi$

Por lo tanto hay *n* argumentos no congruentes

Las raíces n-ésimas de w son:

$$z_0 = \sqrt[n]{|w|}\ \underline{\left|\frac{\theta}{n}\right.} \quad , \quad z_1 = \sqrt[n]{|w|}\ \underline{\left|\frac{\theta+2\pi}{n}\right.} \quad , \quad z_2 = \sqrt[n]{|w|}\ \underline{\left|\frac{\theta+4\pi}{n}\right.} \quad , \quad \ldots \quad , \quad z_{n-1} = \sqrt[n]{|w|}\ \underline{\left|\frac{\theta+2\,(n-1)\pi}{n}\right.}$$

Ejemplo1: calcular las raíces cúbicas de 1:

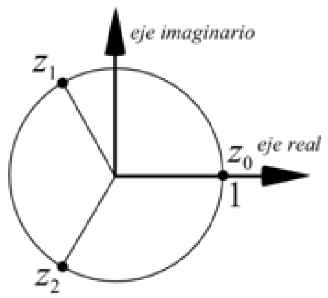
$z^3 = 1 \Rightarrow z^3 = 1\underline{|0}$

$|z| = \sqrt[n]{|w|}$, *como* $n = 3$ *y* $|w| = 1$ *tenemos que*:

$|z| = \sqrt[3]{1}$ *y* $\varphi_k = \dfrac{0 + 2k\pi}{3}$ *luego*:

$$\varphi_0 = \frac{0 + 2\cdot 0\cdot \pi}{3} = 0 \quad \varphi_1 = \frac{0 + 2\cdot 1\cdot \pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \varphi_2 = \frac{0 + 2\cdot 2\cdot \pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Rta.: son raíces cúbicas de 1: $z_0 = 1\underline{|0}$, $z_1 = 1\underline{\left|\frac{2}{3}\pi\right.}$, $z_2 = 1\underline{\left|\frac{4}{3}\pi\right.}$



Ejemplo 1