ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Sea (A,+) donde A es un conjunto y "+" una operación.

<u>Definición</u>: (A,+) es ***grupo*** si se verifican:

+ es asociativa
+ tiene elemento neutro en A
+ tiene elemento inverso (opuesto) en A

<u>Definición</u>: (A,+) es ***grupo abeliano*** o ***grupo conmutativo*** si (A,+) es ***grupo*** y además + es conmutativa.

<u>Definición</u>: Sea el conjunto A y las operaciones + y **.** , se dice que (A,+, **.**) es un ***anillo*** si (A,+) es ***grupo abeliano*** , **.** es asociativa y **.** es distributiva respecto de +.

<u>Definición</u>: (A,+, **.**) es un ***anillo conmutativo*** si es ***anillo*** y además **.** es conmutativa.

<u>Definición</u>: Si (A,+, **.**) es un ***anillo conmutativo*** y **.** tiene elemento neutro, entonces (A,+, **.**) es un ***anillo conmutativo con unidad*** o ***anillo conmutativo con identidad.***

Ejemplos: Son ***anillos conmutativos con identidad***:

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$; $(\mathbb{Q},+,\cdot)$; $(\mathbb{R},+,\cdot)$; $(\mathbb{C},+,\cdot)$

Siendo + y **.** la suma y el producto usuales

<u>Definición</u>: (A,+, **.**) es un ***cuerpo*** si es ***anillo conmutativo con identidad*** y todo elemento distinto de 0 de A posee inverso en A**.**

Ejemplos: Son ***cuerpos***: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$; $(\mathbb{R},+,\cdot)$; $(\mathbb{C},+,\cdot)$

ANILLO DE POLINOMIOS

Definición: Sea K un anillo conmutativo con identidad, se denomina *anillo de polinomios en una indeterminada x con coeficientes en* K al anillo denotado por $K[x]$ cuyos elementos son de la forma:

p(x) = $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, $a_i \in K$, $\forall$ i = 0,1,2,…,n

Los a_i se llaman ***coeficientes*** de p(x) y a p(x) lo llamamos ***polinomio*** en x con coeficientes en K

El ***polinomio nulo*** es aquél cuyos coeficientes son todos nulos;

El ***opuesto*** del polinomio p(x) , o sea – p(x), es el polinomio $\sum_{i=0}^{n} -a_ix^i$

Grado de un polinomio:

Definición: Sea $p(x) \in$ K[x] , $p(x) \neq 0$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$.

Como $p(x) \neq 0$ entonces $\exists\, i$, $0 \le i \le n$, tal que $a_i \neq 0$; sea $k = máx\left\{ i \ / \ a_i \neq 0 \right\}$,entonces k se denomina *grado de* p(x) , y se lo nota $k = gr$(p(x)).

Nota: Al polinomio nulo no se le define grado.
Los polinomios de grado 0 son los elementos no nulos de *K*.

Si p(x) = $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ con $a_n \neq 0$, o sea, $gr(p(x)) = n$, a_n se denomina ***coeficiente principal*** de p(x), y a a_0 ***término independiente*** o ***término constante***.

Un polinomio p(x) se dice ***mónico*** si su coeficiente principal es 1.

Igualdad de polinomios: Los polinomios p(x)= $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, y q(x) = $\sum_{i=0}^{m} b_ix^i$ con $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ son iguales si tienen el mismo grado (es decir $m = n$) y sus respectivos coeficientes son iguales ($a_i = b_i$ i=1,….,n)

Divisibilidad en K[x]:

Definición: Sean p(x), q(x)$\in$ $K[x]$, p(x)$\neq 0$, decimos que p(x) ***divide a*** q(x) (o que p(x) ***es factor de*** q(x), o que p(x) ***es divisor de*** q(x), o que q(x) ***es múltiplo de*** p(x)) si $\exists$ t(x)$\in$ $K[x]$ tal que q(x) = t(x).p(x)

Notación: para indicar que p(x) divide a q(x) escribimos p(x) | q(x) ;

para indicar que p(x) no divide a q(x), escribimos p(x)$\nmid$q(x).

Algoritmo de la división en un cuerpo K:

Sean $a(x), b(x) \in K[x]$, **existen únicos** $q(x)$, $r(x) \in K[x]$ tales que
$b(x) = q(x).a(x) + r(x)$ con $0 \leq gr(r(x)) < gr(a(x)) \vee r(x) = 0$.
$q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **resto** de dividir $b(x)$ por $a(x)$

Ejemplos:

1) $\mathrm{b}(x) = x^2 - 1 \quad \mathrm{a}(x) = x + 1 \Rightarrow b(x) = \underbrace{(x+1)}_{a(x)}.\underbrace{(x-1)}_{c(x)} + \underbrace{0}_{r(x)}$

entonces el cociente es $\mathrm{c}(x) = x - 1$ el resto es $\mathrm{r}(x) = 0$

2) $\mathrm{b}(x) = x^2 - 1 \quad \mathrm{a}(x) = x + 2 \quad \Rightarrow b(x) = (x+2).(x-2)+3$

es decir que el cociente es c(x)= (x-2) y el resto es $\mathrm{r}(x) = 3$

3) Si $\mathrm{b}(x) = x + 2 \quad \mathrm{a}(x) = x^3 + 1$ serán $\mathrm{c}(x) = 0 \quad \mathrm{r}(x) = x + 2$

Especialización o valor numérico:

Si $\mathrm{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathrm{K}[x], k \in \mathrm{K}$, se llama **especialización**

de $\mathrm{P}(x)$ en $x = k$, al valor $\mathrm{P}(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i k^i$

Raíz de un polinomio:

Definición: Sea K un cuerpo, $k \in \mathrm{K}$ y el polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathrm{K}[x]$, se dice que k es ***raíz*** de $p(x)$, si el polinomio especializado en k es cero, o sea $p(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i k^i = 0$

Ejemplo: Si $\mathrm{p}(x) = x^2 - 1$, $\mathrm{p}(1) = 1^2 - 1 = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de $\mathrm{p}(x)$

<u>**Teorema**</u>: Sea K un cuerpo, $k \in K$, $p(x) \in \mathrm{K}[x]$.
k es raíz de $p(x)$ si y sólo si $(x - k) \mid p(x)$

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea k raíz de $p(x)$, queremos ver que $(x - k) \mid p(x)$.
Aplicando el Algoritmo de la División:
$p(x) = (x - k).\, q(x) + r$ con $r \in K$, pues (x - k) es un polinomio de grado 1.
Especializando $p(x)$ en k tenemos que:
$p(k) = (k - k).\, q(k) + r = 0.\, q(k) + r = r$
Como k es raíz de $p(x)$ tenemos que $p(k) = 0 \quad \therefore \quad r = 0$,

por tanto $(x-k) \mid p(x)$

$\Leftarrow$) Supongamos que $(x-k) \mid p(x)$ $\therefore$ $p(x) = (x-k).\, q(x)$ para cierto $q(x) \in K[x]$;
especializando x en k, tenemos $p(k) = (k-k).\, q(k) = 0.\, q(k) = 0$
$\therefore$ k es raíz de $p(x)$

Con lo que queda demostrado el teorema.

Corolario 1 (Teorema del Resto): El resto en la división de un polinomio $p(x) \in K[x]$ por $(x-a)$ es $p(a)$.

Demostración: $\mathrm{p}(x) = (x-a)\cdot \mathrm{c}(x) + \mathrm{r} \Rightarrow \mathrm{p}(a) = (a-a)\cdot \mathrm{c}(a) + \mathrm{r} \Rightarrow \mathrm{p}(a) = \mathrm{r}$

Ejemplo: hallar el resto del cociente $\dfrac{\mathrm{p}(x)}{\mathrm{q}(x)}$ siendo $\mathrm{p}(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ $\mathrm{q}(x) = (x-2)$:

$$\mathrm{r} = \mathrm{p}(2) = 2^3 + 2\cdot 2^2 + 1 = 17$$

Corolario 2:

Si $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ son raíces distintas de $\mathrm{p}(x) \in \mathrm{K}[x]$, entonces $\mathrm{p}(x)$ es divisible por $(x-k_1)\cdot(x-k_2)\cdot(x-k_3)\cdot \ldots \cdot(x-k_n)$

ó, lo que es equivalente $\mathrm{p}(x)$ esdivisiblepor $\prod_{i=0}^{n}(x-k_i)$

Raíz múltiple:

Definición:
Sea $\mathrm{p}(x)$ un polinomio en $\mathrm{K}[x]$, se dice que k es raíz de multiplicidad m de $\mathrm{p}(x)$ si $\mathrm{p}(x)$ es divisible por $(x-k)^m$ y no lo es por $(x-k)^{m+1}$

Ejemplo:
Averiguar la multiplicidad de 1 como raíz de $\mathrm{p}(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$
Aplicamos la regla de Ruffini:

	1	-1	-3	5	-2
1		1	0	-3	2
	1	0	-3	2	**0**
1		1	1	-2	
	1	1	-2	**0**	
1		1	2		
	1	2	**0**		

1		1	
	1	**3 ≠ 0**	

Por lo que se desprende de aplicar la regla de Ruffini, tenemos que 1es raíz de multiplicidad 3

Además, el monomio cociente $(x+2)$ nos dice que -2 es raíz de p(x)

Por lo tanto $\mathrm{p}(x)$ puede reescribirse en forma factorizada como $\mathrm{p}(x)=(x-1)^3(x+2)$

Teorema de Gauss:

Si *p* y *q* son números enteros no nulos, primos entre sí, tales que el número racional $\frac{p}{q}$ es raíz del polinomio $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, con gr(p(x)) = n y $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$

entonces $p|a_0$ y $q|a_n$

Ejemplo 1: determinar, en caso que existan, las raíces racionales de $\mathrm{p}(x)=8x^3+10x^2-11x+2$

Es aplicable el teorema de Gauss porque los coeficientes de $\mathrm{p}(x)$ son enteros.

Entonces:

divisores de a_0: $\{1,-1,2,-2\}$ divisoresde a_n: $\{1,-1,2,-2,4,-4,8,-8\}$

Posibles raíces racionales: $\left\{1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{8},2,-2\right\}$

$\mathrm{p}(1)=8+10-11+2\neq 0 \Rightarrow 1$ no es raiz de $\mathrm{p}(x)$; $\mathrm{p}(-2)=0 \Rightarrow -2$ es raiz de $\mathrm{p}(x)$ ...

$\mathrm{p}(1/2)=0 \Rightarrow 1/2$ es raíz de $\mathrm{p}(x)$; $\mathrm{p}(1/4)=0 \Rightarrow 1/4$ es raiz de $\mathrm{p}(x)$

Luego, las **raíces racionales** de p(x) son $x_1=-2$; $x_2=\frac{1}{2}$; $\mathrm{x}_3=\frac{1}{4}$

Ejemplo 2: hallar los ceros (raíces) racionales de $\mathrm{q}(x)=4x^3+5x^2-\frac{11}{2}x+1$ en caso de que existan:

En este caso no se puede aplicar el teorema de Gauss, pues hay un coeficiente no entero.

Sin embargo se puede llevar la expresión polinómica dada a otra que tenga las mismas raíces que q(x) y to

coeficientes enteros.

En este caso bastará con multiplicar el polinomio $\mathrm{Q}(x)$ por 2 y así tendremos el polinomio:

$\mathrm{p}(x)=2.\mathrm{q}(x)=8x^3+10x^2-11x+2$ y podemos aplicar T. de Gauss.

(**Aclaración**: Si *a* es raíz de un polinomio t(x) $\in K[x]$, también es raíz de h(x) = *k*.t(x) cualquiera sea $k \in K$, $k \neq 0$)

Nota: es importante recordar que el teorema de Gauss nos permite encontrar las **raíces racionales** de cualquier polinomio con coeficientes enteros. Si al aplicarlo no obtenemos ninguna raíz, esto indica que el polinomio en cuestión **no tiene raíces racionales**, pero no significa que no existan raíces **no racionales** del mismo.

Ejemplo: El polinomio p(x) = x^2-3 tiene coeficientes enteros. Por T. de Gauss las posibles raíces racionales son 1, -1, 3 y -3 pero ninguno de esos valores resulta raíz de p(x).
Eso nos garantiza que **p(x) no tiene raíces racionales**.
Pero sí tiene dos raíces reales que son $x_1 = \sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$

Teorema fundamental del álgebra:

Todo polinomio con coeficientes reales, de grado positivo, posee una raíz en $\mathbb{C}$

Raíces de polinomios con coeficientes reales:

Sea $\mathrm{p}(x) \in \mathbb{R}[x]$, un polinomio de grado n , $z \in \mathbb{C}$ es raíz de $\mathrm{p}(x)$ si y sólo si $\overline{z}$ es raíz de $\mathrm{p}(x)$

Demostración:

$\Rightarrow)$ $\mathrm{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad a_i \in \mathbb{R}, 0 \le i \le n, a_n \neq 0$

como z es raíz de $\mathrm{p}(x)$, $\mathrm{p}(z) = 0 = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$

Conjugamos ambos miembros: $\overline{0} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} \Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i z^i} \Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\, \overline{z^i} \Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^{n} a_i\, \overline{z^i} = \mathrm{p}(\overline{z})$

$\therefore$ $\overline{z}$ es raíz del polinomio $\mathrm{p}(x)$

$\Leftarrow)$ $\mathrm{p}(\overline{z}) = 0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z^i}$ conjugando: $\overline{0} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z^i}} \Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i \overline{z^i}} \Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\, \overline{\overline{z^i}} \Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$

(observar que como $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i = \overline{a_i}$)
$\therefore z$ es raíz de $\mathrm{p}(x)$

Corolario 1: Todo polinomio de grado impar y coeficientes reales, admite al menos una raíz real.

Corolario 2: Si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de multiplicidad m de $\mathrm{p}(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces $\overline{z}$ también es raíz de multiplicidad m de p(x)

Corolario: Para todo polinomio *p(x)* de grado n>0, existen complejos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tales que si a_n es el coeficiente principal de *p(x)*, entonces

$$p(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - z_i)$$

Ejemplos:

Ejercicio1: determinar un polinomio $\mathrm{p}(x) \in \mathbb{R}[x]$ cuyas raíces sean $z_1 = 2,\ z_2 = 1+i$ y su coeficiente principal sea 3.

$p(x) = 3(x-2)\big(x-(1+i)\big)\big(x-(1-i)\big)$

Ejercicio2: determinar un polinomio $\mathrm{g}(x) \in \mathbb{C}[x]$ cuyas raíces sean $z_1 = 2, z_2 = 1+i$ y *su*coeficiente principal sea 3

$\mathrm{g}(x) = 3(x-2)\big(x-(1+i)\big)$

Ejercicio 3: determinar un polinomio $\mathrm{t}(x) \in \mathbb{C}[x]$ que tenga a i como raíz doble.

$\mathrm{t}(x) = a(x-i)^2 \ ,a \in \mathbb{C}$

Ejercicio 4: determinar un polinomio $\mathrm{s}(x) \in \mathbb{R}[x]$ que tenga a i como raíz doble.

$\mathrm{s}(x) = a(x-i)^2(x+i)^2 \ ,a \in \mathbb{R}$

Ejercicio 5: determinar un polinomio $\mathrm{p}(x) \in \mathbb{R}[x]$ que tenga a i como raíz doble y $\mathrm{p}(1) = 2$.

$\mathrm{p}(x) = a(x-i)^2(x+i)^2 \quad \wedge \quad \mathrm{p}(1) = 2$

$\mathrm{p}(x) = a\left(x^4+2x^2+1\right), \quad \mathrm{p}(1) = 2 \Rightarrow a\left(1^4+2\cdot 1^2+1\right) = 2$

$\Rightarrow a\cdot 4 = 2 \Rightarrow a = \dfrac{2}{4} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{p}(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^4+2x^2+1\right) = \dfrac{x^4}{2}+x^2+\dfrac{1}{2}$

Proposición: dado $\mathrm{q}(x) \in \mathbb{Q}[x]$, si $a+b\sqrt{p}$ es raíz de $\mathrm{q}(x)$, con $(a,b,p \in \mathbb{Q})$, $p>0, \sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ entonces $a-b\sqrt{p}$ también lo es.

Cálculo de raíces de un polinomio de grado 2:

Sea $\mathrm{p}(x) = ax^2+bx+c\ , a,b,c \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Buscamos las raíces:

$ax^2+bx+c = 0$ multiplicamos ambos miembros por $4a$

$4aax^2+4abx+4ac=0 \Rightarrow\ 4a^2x^2+2\cdot 2\cdot axb=-4ac$

$\Rightarrow (2ax)^2+2\cdot 2\cdot axb=-4ac \overset{(1)}{\Rightarrow} (2ax)^2+2\cdot 2\cdot axb+b^2=b^2-4ac$

((1) sumamos b^2 a ambos miembros de la igualdad)

$\Rightarrow (2ax)^2+2\,(2ax)\,b+b^2=b^2-4ac \Rightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac$

se calculan las raíces cuadradas de b^2-4ac, las cuales son $y_1=2ax_1+b$ e $y_2=2ax_2+b$

$\therefore\ x_1=\dfrac{-b+y_1}{2a} \quad \wedge \quad x_2=\dfrac{-b+y_2}{2a}$ que son las raíces de p(x)

Ejemplo: calcular las raices del polinomio $p(x)=ix^2+(1-i)\,x-1$

$a=i\ ,b=1-i\ ,c=-1$ entonces tenemos que

$b^2-4ac=(1-i)^2-4i\cdot(-1)=(1-i)^2+4i=2i$

Luego tenemos que $(2ax+b)^2=2i$

Debemos hallar las raíces cuadradas de $2i$:

Diremos que $\exists\ \mathrm{w}\in\mathbb{C}$ tal que $\mathrm{w}^2=2i$

$|w|=\sqrt{|2i|}=\sqrt{2}\quad ,cos(\theta)=0\wedge sen(\theta)=\dfrac{2}{2}=1 \quad\Rightarrow\quad \theta=\dfrac{\pi}{2}\quad 2\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi=\dfrac{(1+4\,k)\pi}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_k=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(1+4\,k)\pi}{2}\Rightarrow \varphi_k=\dfrac{(1+4k)\pi}{4}\quad \varphi_0=\dfrac{\pi}{4}\,,\varphi_1=\dfrac{5}{4}\pi\quad \mathrm{w}_0=\sqrt{2}\,\underline{\left|\dfrac{\pi}{4}\right.}\quad \mathrm{w}_1=\sqrt{2}\,\underline{\left|\dfrac{5}{4}\pi\right.}$

$\mathrm{w}_0=\sqrt{2}\left(cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\ sen\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$

$\mathrm{w}_1=\sqrt{2}\left(cos\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)+i\ sen\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ i\right)=-1-i$

Finalmente los ceros (raíces) del polinomio son:

$x_1=\dfrac{(-1+i)+(1+i)}{2i}=\dfrac{2i}{2i}=1$

$x_2=\dfrac{(-1+i)+(-1-i)}{2i}=\dfrac{-2}{2i}=\dfrac{-2}{2i}\cdot\dfrac{(-2i)}{(-2i)}=\dfrac{4i}{(-4i^2)}=\dfrac{4i}{4}=i$

Polinomios irreducibles:

Definición: sea K un cuerpo , $\mathrm{p}(x)\in\mathrm{K}[x]$ es irreducible si:

1) $\mathrm{gr.}(\mathrm{p}(x))>0$
2) No existe $\mathrm{q}(x)\in\mathrm{K}[x]$ tal que $\mathrm{gr}(\mathrm{p}(x))>\mathrm{gr}(\mathrm{q}(x))>0\wedge\mathrm{q}(x)\,|\,\mathrm{p}(x)$

Observaciones:

1) Si K es cuerpo, todo polinomio de grado 1 con coeficientes en K es irreducible.

2) Para $\mathrm{p}(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que gr(p(x)) =2 se tiene que

$p(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ entonces:

i) Si $b^2 - 4ac < 0$ p(x) es **irreducible** en $\mathbb{R}[x]$

ii) Si $b^2 - 4ac > 0$ p(x) tiene **dos raíces reales distintas**, por lo cual puede factorizarse como producto de dos polinomios de grado 1

iii) Si $b^2 - 4ac = 0$ p(x) tiene **una raíz real** $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ de multiplicidad 2,

entonces $p(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

3) En $\mathbb{Q}[x]$, $p(x) = ax^2 + bx + c$ es reducible si y sólo si $b^2 - 4ac$ es un cuadrado en $\mathbb{Q}$

Ejemplo: $\mathrm{p}(x) = x^2 + 1$ $\quad \mathrm{p}(x) = (x - i)(x + i)$

entonces $\mathrm{p}(x)$ es reducible en $\mathbb{C}[x]$, pero es irreducible en $\mathbb{R}[x]$

Teorema: Si K es cuerpo, un polinomio $\mathrm{p}(x) \in \mathrm{K}[x]$, $\quad 0 < \mathrm{gr}(\mathrm{p}(x)) \leq 3$ es **reducible** en $\mathrm{K}[x]$ si y sólo si p(x) posee una raíz en K

<u>Demostración</u>:

$\Rightarrow)$ $\quad \mathrm{p}(x) = \mathrm{q}(x) \cdot \mathrm{t}(x) \, / \, \mathrm{q}(x), \mathrm{t}(x) \in \mathrm{K}[x] \quad \mathrm{gr}(\mathrm{q}(x)) = 1 \quad \vee \quad \mathrm{gr}(\mathrm{t}(x)) = 1$

Supongamos que $\mathrm{gr}(\mathrm{q}(x)) = 1 \Rightarrow \mathrm{q}(x) = ax + b \quad , a, b \in \mathrm{K}, a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{p}(x) = (ax + b) \cdot \mathrm{t}(x)$

$ax + b = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \in \mathrm{K}$, es cero (raíz) de $\mathrm{p}(x)$

$\Leftarrow)$ Como $\mathrm{p}(x)$ posee una raíz en K, sea k la raíz, entonces $\mathrm{p}(x) = (x - k) \cdot \mathrm{t}(x)$ con lo cual probamos qu es reducible en $\mathrm{K}[x]$

Ejercicio: a) Determinar todas las raíces de $\mathrm{p}(x) = x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 8x - 8$ sabiendo que i es raíz de $\mathrm{p}(x)$.

b) Factorizar $\mathrm{p}(x)$ en producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$. Justificar

a) Como $\mathrm{p}(x)$ es divisible por $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ podemos dividir a $\mathrm{p}(x)$ por $x^2 + 1$:

$$
\begin{array}{ccccccc|ccccc}
x^6 & -4x^5 & +3x^4 & +4x^3 & -6x^2 & +8x & -8 & x^2 & +1 & & & \\
\hline
x^6 & - & x^4 & & & & & x^4 & -4x^3 & +2x^2 & +8x & -8 \\
\hline
0 & -4x^5 & +2x^4 & +4x^3 & -6x^2 & +8x & -8 & & & & & \\
- & -4x^5 & & -4x^3 & & & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
\hline
0 & +2x^4 & +8x^3 & -6x^2 & +8x & -8 \\
- & +2x^4 & & +2x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & 0 & +8x^3 & -8x^2 & +8x & -8 \\
 & - & +8x^3 & & +8x & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & -8x^2 & 0 & -8 \\
 & & - & -8x^2 & & -8 \\
\cline{4-6}
 & & & 0 & & 0
\end{array}
$$

Buscamos las raíces del cociente q(x)= $x^4-4x^3+2x^2+8x-8$:
Por Teorema de Gauss, tenemos que las posibles raíces son $\{-1,1,2,-2,4,-4,8,-8\}$, entonces,

$q(1)\neq 0$

$q(-1)\neq 0$

$q(2)=0 \therefore 0$ es raíz de $q(x)$

Analizamos la multiplicidad de esta raíz dividiendo q(x) por (x-2) mediante regla de Ruffini:

	1	-4	2	8	-8
2		2	-4	-4	8
	1	-2	-2	4	0
2		2	0	-4	
	1	0	-2	0	

Así tenemos que 2 es raíz doble.

Además, el último polinomio cociente $t(x)=x^2-2$ tiene las últimas dos raíces de $p(x)$ que faltan hallar:

Raícesde $t(x)$: $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

Concluimos entonces que las **seis** raíces de p(x) son:

i , -i, 2 de multiplicidad 2, $\sqrt{2}$ y -$\sqrt{2}$

Estamos entonces en condiciones de responder la segunda parte del ejercicio:

b) En $\mathbb{C}[x]$ $p(x)=(x-i)(x+i)(x-2)(x-2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

Es producto de polinomios irreducibles ya que todos son de grado 1.

Simplificamos la notación escribiendo $p(x)=(x-i)(x+i)(x-2)^2\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

En $\mathbb{R}[x]$ $p(x)=\left(x^2+1\right)(x-2)^2\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

Donde $\left(x^2+1\right)$ es irreducible por ser un polinomio de grado 2 (menor que 3) que no tiene raíces reales.

En $\mathbb{Q}[x]$ $\quad \mathrm{p}(x)=\left(x^2+1\right)(x-2)^2\left(x^2-2\right)$

Donde $\left(x^2+1\right)$ y $\left(x^2-2\right)$ son polinomios de grado de grado 2 (menor que 3) que no tienen raíces racionales.