MATRICES Y DETERMINANTES

MATRICES

Definición: Se llama matriz *m* x *n* a un cuadro de elementos de un conjunto K ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$), dispuestos en *m* filas y *n* columnas:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad a_{ij} \in \mathrm{K}, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n$$

Abreviamos la notación nombrando A= (a_{ij}), $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$

Notamos al conjunto por todas ellas formado como **M$_{\mathbf{mxn}}$(K)**

Si m=n decimos que las matrices son **cuadradas** y en lugar de notar al conjunto por ellas formado como **M$_{\mathbf{nxn}}$(K)** simplificamos la notación nombrándolo **M$_{\mathbf{n}}$(K)**

Ejemplos:

1) Construir una matriz $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} = i^2 - 2j + 1$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1^2 - 2\cdot 1 + 1 = 0 \\ a_{12} = 1^2 - 2\cdot 2 + 1 = -2 \\ a_{21} = 2^2 - 2\cdot 1 + 1 = 3 \\ a_{22} = 2^2 - 2\cdot 2 + 1 = 1 \end{cases} \quad \text{Por lo tanto será } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Escribir la matriz $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{3x2}(\mathbb{R})$ tal que $\begin{cases} a_{ij} = 1 \quad si \quad i < j \\ a_{ij} = -2 \quad si \quad i > j \\ a_{ij} = 0 \quad si \quad i = j \end{cases}$

Entonces será $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

Igualdad de matrices:

Definición: diremos que dos matrices $\mathrm{A} = (a_{ij})$ y $\mathrm{B} = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathrm{K})$ son iguales, y escribiremos

$\mathrm{A} = \mathrm{B}$, si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i, j,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$

Suma de matrices:

Definición: si $\mathrm{A} = (a_{ij})$ y $\mathrm{B} = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathrm{K})$ se llama <u>suma</u> de A y B y se nota A + B a la matriz

$\mathrm{C} = (c_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathrm{K})$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$

Ejemplo: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma:

Sean A, B, $C \in M_{m\times n}(K)$ entonces:

S_1) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (propiedad asociativa)

S_2) $A+B = B+A$ (propiedad conmutativa)

S_3) La matriz $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K)$ es tal que $A+0 = 0+A = A$, $\forall A \in M_{m\times n}(K)$

Se llama matriz nula

S_4) Dada $A = (a_{ij})$, la matriz $B = (-a_{ij})$ es tal que $A+B=0$, se llama matriz opuesta de A.

Ejercicio: Determinar si existen valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que $\begin{pmatrix} a+b & -a \\ a+b & b+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b+2c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & -a-b \\ a+2b+2c & b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ -a-b=-2 \\ a+2b+2c=1 \\ b+c=-2 \end{cases}$$

pero $a+b=3 \Rightarrow -(a+b) = -a-b = -3 \neq -2$ $\therefore$ no hay solución

Nota: la diferencia entre una matriz y otra es igual a la suma entre la primera matriz y la opuesta de la segunda: $C-D = C+(-D)$.

Producto de matrices:

Definición: Dadas $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in M_{n\times t}(K)$ se llama producto de A.B a la matriz $C = (c_{ij}) \in M_{m\times t}(K)$ donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Observación: El producto de matrices **A.B** se define si **el número de columnas de A** es **igual al número de filas de B**.

Primer caso: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + ... + a_{1n} \cdot b_{n1}$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 13$

Segundo caso $\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}}_{mxn} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ . \\ b_{n1} \end{pmatrix}}_{nx1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + \cdots + a_{2n} \cdot b_{n1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{n1} \end{pmatrix}}_{mx1}$

Ejemplo: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1+4+(-1)\cdot(-1) \\ 0+4-1 \\ 3+2-1 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Tercer caso: $\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}}_{mxn} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & b_{1t} \\ b_{21} & b_{22} & . & b_{2t} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & b_{nt} \end{pmatrix}}_{nxt} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} & . & c_{2t} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & . & c_{mt} \end{pmatrix}}_{mxt}$

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + ... + a_{1n} \cdot b_{n1} \quad c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + ... + a_{1n} \cdot b_{n2}$

$c_{1t} = a_{11} \cdot b_{1t} + a_{12} \cdot b_{2t} + ... + a_{1n} \cdot b_{nt}$

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + ... + a_{2n} \cdot b_{n1} \quad c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + ... + a_{2n} \cdot b_{n2}$

$c_{2t} = a_{21} \cdot b_{1t} + a_{22} \cdot b_{2t} + ... + a_{2n} \cdot b_{nt}$

$c_{m1} = a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + ... + a_{mn} \cdot b_{n1} \quad c_{m2} = a_{m1} \cdot b_{12} + a_{m2} \cdot b_{22} + ... + a_{mn} \cdot b_{n2}$

$c_{mt} = a_{m1} \cdot b_{1t} + a_{m2} \cdot b_{2t} + ... + a_{mn} \cdot b_{nt}$

Ejemplo: $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{4x2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{2x2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -6 \\ 17 & -2 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}}_{4x2}$

Nota: Si $m=n$, en $M_n(K)$ el producto siempre está definido y, si con A, B, C notamos matrices cuadradas de orden n, tenemos:

Propiedades del producto:

1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad$ (propiedad asociativa)

2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
(prop. distributiva del producto respecto de la suma)

3) $\mathrm{Id}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz identidad de orden } n}$ es tal que $A \cdot \mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_n \cdot A = A \ \forall A \in M_n(K)$

Ejemplo: $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Observaciones:

Sean, por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

calculemos $A \cdot B$ y $B \cdot A$:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde se deduce que:

1) El producto de matrices no es, en general, conmutativo
2) El producto de matrices puede ser nulo sin que ninguno de los factores lo sea.

Producto de un escalar por una matriz:

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$ y $\lambda \in K$, se define $\lambda \cdot A$ como sigue:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda.a_{11} & \lambda.a_{12} & \ldots & \lambda.a_{1n} \\ \lambda.a_{21} & \lambda.a_{22} & \ldots & \lambda.a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ \lambda.a_{m1} & \lambda.a_{m2} & \ldots & \lambda.a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.A = \begin{pmatrix} 2.2 & 2.(-1) \\ 2.3 & 2.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de un escalar por una matriz:

Sean $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathrm{K})$ y $\lambda, \lambda' \in \mathrm{K}$

1) $\lambda(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \lambda\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B}$

2) $(\lambda + \lambda')\cdot \mathrm{A} = \lambda\mathrm{A} + \lambda'\mathrm{A}$

3) $(\lambda \cdot \lambda')\cdot \mathrm{A} = \lambda\cdot(\lambda'\cdot \mathrm{A})$

4) $1\cdot \mathrm{A} = \mathrm{A}$

5) Si además $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ está definido: $(\lambda\cdot\mathrm{A})\cdot\mathrm{B} = \mathrm{A}\cdot(\lambda\cdot\mathrm{B}) = \lambda\cdot(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})$

Sea $\mathrm{A}\in \mathrm{M}_n(K)$, $k\in\mathbb{N}$ definimos **potencia natural** de A como sigue: $\mathrm{A}^1 = \mathrm{A}$ $\quad \mathrm{A}^{k+1} = \mathrm{A}^k.\mathrm{A}$

Matriz traspuesta:

Definición: Si $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathrm{K})$, se llama matriz traspuesta de A y se nota A^{t}, a la matriz perteneciente a $\mathrm{M}_{n\times m}(\mathrm{K})$ que se obtiene a partir de A, intercambiando filas por columnas.

Es decir que $\mathrm{A}^{\mathrm{t}} = (b_{ij})$ con $b_{ij} = a_{ji}$ $\quad 1\le i\le n\ ,1\le j\le m$

Ejemplo:

$$\mathrm{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{3x2} \Rightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{t}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{2x3}$$

Propiedades de la matriz traspuesta:

1) $(\mathrm{A}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = \mathrm{A}$

2) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{t}} = \mathrm{A}^{\mathrm{t}} + \mathrm{B}^{\mathrm{t}}$

3) $(\lambda\cdot\mathrm{A})^{\mathrm{t}} = \lambda\cdot\mathrm{A}^{\mathrm{t}} \quad \lambda\in\mathrm{K}$

4) $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{\mathrm{t}} = \mathrm{B}^{\mathrm{t}}\cdot\mathrm{A}^{\mathrm{t}} \neq \mathrm{A}^{\mathrm{t}}\cdot\mathrm{B}^{\mathrm{t}}$

Definición: Una matriz $A\in M_n(K)$ se dice **simétrica** si $A = A^t$

Definición: Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ se dice **triangular superior** si $a_{ij} = 0$ para $i > j$

Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ se dice **triangular inferior** si $a_{ij} = 0$ para $i < j$

Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ se dice **triangular** si triangular superior o triangular inferior.

Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ se dice **diagonal** si $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}: i \neq j$ es $a_{ij} = 0$

Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ se dice **escalar** si $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}: i \neq j$ es $a_{ij} = 0$ y además $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{jj}$

Ejemplos: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{\textit{matriz triangular superior}}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}}_{\textit{matriz triangular inferior}}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{\textit{matriz diagonal}}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\textit{matriz escalar}}$

DETERMINANTES:

Clase de una permutación:

Dados los números $1, 2, 3, ..., n$ sabemos que hay $n!$ permutaciones de los mismos.
Así, si $n = 3$, hay $3! = 6$ permutaciones que son: 123, 213, 312, 132, 231, 321.
La permutación $1, 2, ... n$ en la que los números figuran en el orden natural será llamada <u>permutación principal</u>. En el ejemplo, 123 es la permutación principal.

En una permutación de orden n diremos que los números i, j forman una <u>inversión</u> si j figura a la izquierda de i, siendo $i < j$.

Ejemplo: En la permutación de orden 5: 34215 los números 3 y 2 forman una inversión; 3 y 1 forman otra inversión; 4 forma dos inversiones (con 2 y con 1); 2 forma una inversión con 1...

El número total de inversiones de una permutación es la suma del número de inversiones que forma cada número en la misma.
Si este número es par (impar) la permutación se dice de clase par (impar).
En el ejemplo anterior, el número total de inversiones es $2+2+1=5$ es decir, es de clase impar.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden n, consideremos todos los productos de n elementos de la matriz A de modo que los elementos que intervienen en cada producto pertenezcan a filas y columnas diferentes.

Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ todos estos productos son:
$a_{11}a_{22}a_{33}$; $a_{11}a_{23}a_{32}$; $a_{12}a_{21}a_{33}$;
$a_{12}a_{23}a_{31}$; $a_{13}a_{21}a_{32}$; $a_{13}a_{22}a_{31}$

En una matriz de orden n, cada uno de esos productos puede escribirse como: $a_{1\delta_1} \cdot a_{2\delta_2} \cdot a_{3\delta_3} \cdot ... \cdot a_{n\delta_n}$
donde $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ es una permutación de orden n.
A cada uno de estos productos los precedemos de un signo + o – considerando para cada producto
$(-1)^k\ a_{1\delta_1} \cdot a_{2\delta_2} \cdot a_{3\delta_3} \cdot ... \cdot a_{n\delta_n}$ donde k es el número de inversiones de la permutación $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$.
La suma de todos estos productos es, por definición, el <u>determinante</u> de la matriz A y lo notaremos $\det(A)$ o $D(A)$ o $|A|$

Según la definición, $\det(A) = \sum (-1)^k\ a_{1\delta_1} \cdot a_{2\delta_2} \cdot a_{3\delta_3} \cdot ... \cdot a_{n\delta_n}$ donde k es el número de inversiones de la permutación $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ y cada término de la suma se obtiene haciendo variar $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ por las $n!$ permutaciones de orden n.

Así, si por ejemplo es:

$$n=2,\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = (-1)^0\, a_{11}\cdot a_{22} + (-1)^1\, a_{21}\cdot a_{12} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$$

$$n=3,\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Ejemplo: Calcular el determinante de las matrices A y B siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$\det(A) = 1\cdot(-1) - 3\cdot 4 = -13$ y

$\det(B) = 0 + 2\cdot 3\cdot 3 + (-1)\cdot 1\cdot(-1) - 0 - 1\cdot 1\cdot 3 - 0 = 16$

<u>Observaciones</u>:

1) En el caso n=2, tenemos Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

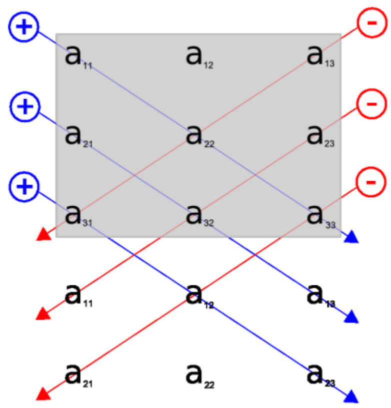
El segundo producto tiene un subíndice 21 (a_{21}), por lo tanto hay una inversión y es la única, entonces hay una inversión de tipo impar, por lo que el producto es de la forma $(-1)^1\cdot a_{12}a_{21}$ y el determinante de A resulta

det(A) = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2) En el caso n=3, podemos ver que

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Esta operación da origen a la regla conocida como **regla de Sarrus**, método fácil para memorizar y calcular un determinante 3×3. Recibe su nombre del matemático francés Pierre Frédéric Sarrus, que la introdujo en el artículo «Nouvelles méthodes pour la résolution des équations», publicado en Estrasburgo en 1833. La regla consiste en repetir las dos primeras filas de la matriz debajo de la misma de manera que queden cinco filas. Después sumar los productos de las diagonales que en el diagrama se señalan con (+) $(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23})$ y sustraer los productos de las diagonales que se señalan con (-) $(-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21})$, como muestra el diagrama



Propiedades del determinante:

1) El determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta ,

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Por lo tanto a toda propiedad de un determinante, relativa a las filas de una matriz, le corresponde una propiedad análoga para las columnas y recíprocamente ya que las filas (columnas) de una matriz son las columnas (filas) de su traspuesta.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3+8-\left(\left(-2\right)+2\right) = 11 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

2) Si B es la matriz que se obtiene de A intercambiando dos columnas(o filas), entonces $\det\left(B\right) = -\det\left(A\right)$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -11 \quad \text{pues se intercambiaron las filas 1 y 2}$$

3) Si C es la matriz que se obtiene multiplicando **todos** los elementos de una fila (o columna) por un número k, entonces det(C) = k.det(A)

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 33$$

4) Si **E= k.A**, entonces, det (E) = k^n. det(A)

$$\det(E) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 9 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 3^3.\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 27.11 = 297$$

5) El determinante de la matriz identidad es 1
6) Si una matriz tiene dos filas (ó columnas) iguales, su determinante es 0.

7) Antes de enunciar la propiedad 7, veamos la siguiente definición :

Definición: Sea A una matriz de orden n, si indicamos con C_1, C_2,…..C_n las columnas de A, diremos que la columna C_i es **combinación lineal** de las columnas C_j y C_k $1 \le j,k \le n$, si existen números α, β tales que $C_i = \alpha.C_j + \beta.C_k$.

Análogamente se define combinación lineal entre filas de una matriz A.

Ejemplos:

a) En $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ es $C_3 = 2C_1 + C_2$

b) En $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ es $F_3 = F_2 - 3F_1$

Propiedad: Si en una matriz una columna (o fila) es combinación lineal de otras columnas (o filas) entonces el determinante de la matriz es 0

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0 \qquad \det(\mathrm{B})=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -8 \end{vmatrix}=0$$

8) Si F´ es la matriz que se obtiene al sumar a una columna (fila) de la matriz F, una combinación lineal de otras columnas (filas) de F, entonces det (F´)=det(F)
Ejemplo:

$$F=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad C_3' = 2C_1 + C_3 \quad \Rightarrow \quad F'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(F)=\det(F')=1$$

9) El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada una de ellas.

$$\det(A.B) = \det(A) . \det(B)$$

Cálculo de determinantes:

Recordando la definición de matriz triangular y considerando la definición de determinante, resulta que si A es una matriz triangular, será $\det(A) = a_{11}.a_{22}.......a_{nn}$.

Por lo cual un método para calcular el determinante de una matriz consiste en reducirla a una matriz triangular (**método de triangulación**).

Para ello aplicamos a la matriz dada, operaciones del tipo I, II y III llamadas **operaciones elementales** que consisten en:

I) Intercambiar dos filas (columnas) entre sí.
II) Remplazar una fila (columna) por la que se obtiene al multiplicarla por un número distinto de 0.
III) Remplazar una fila (columna) por la que se obtiene al sumarle a esta otra fila (columna) previamente multiplicada por un número.

Observación: Debe tenerse siempre en cuenta las posibles variaciones del valor del determinante de acuerdo a las propiedades vistas.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}F_1} (-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1 \to F_3} (-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 - 10F_2 \to F_3} (-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = (-3).1.1.(-55) = 165$$

Definición:

Dada una matriz $A = \left(a_{ij}\right)$, se llama "menor complementario" del elemento a_{ij} y se nota M_{ij} al determinante de la matriz que se obtiene a partir de A suprimiendo la fila i y la columna j

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ los menores complementarios de cada elemento de la primera fila, son:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Ejercicio: hallar los restantes menores complemetarios de la matriz A

Definición:

Se llama "complemento algebraico" (o adjunto, o cofactor) del elemento a_{ij} de la matriz A al número $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$

Ejemplo:

Volviendo al ejemplo de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

el complemento algebraico de a_{11} es: $A_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = 1$

el complemento algebraico de a_{12} es: $A_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = -1 \cdot 2 = -2$

el complemento algebraico de a_{13} es: $A_{13} = (-1)^4 \cdot M_{13} = 1 \cdot 4 = 4$

Esta definición da lugar a otro método para calcular el determinante de una matriz:

Teorema:

El determinante de una matriz $A = \left(a_{ij}\right)$ es igual a la suma de los elementos de una linea (fila o columna) multiplicados cada uno de ellos por sus respectivos complementos algebraicos.

Así $\det(A) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$ (desarrollo por la fila i)

O bien $\det(A) = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$ (desarrollo por columna j)

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 2 \cdot 4 = 11$ (desarrollado por la fila 1)

Observación: Si una matriz A=(a_{ij}) de orden n tiene todos los elementos de una línea menos uno, iguales a 0, el cálculo de su determinante se reduce , desarrollando por esa línea, al cálculo de un determinante de orden n-1.
Por lo tanto, antes de calcular det(A), conviene aplicar operaciones elementales a las filas y/o columnas de A para hacer cero todos, menos uno, los elementos de una fila o columna, reiterando este procedimiento hasta reducir el cálculo al de un determinante de orden 3 o 2.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{-3F_2+F_1 \leftrightarrow F_1 \\ -2F_2+F_3 \leftrightarrow F_3 \\ -3F_2+F_4 \leftrightarrow F_4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1.\underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1}.\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \overset{F_1+F_3 \to F_1}{=} -\begin{vmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\underbrace{(-1)^{3+1}}_{1}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(9.3 - 3.3) = -18$$

Matriz inversa:

Una matriz A de orden n tiene inversa si existe una matriz B, de orden n, tal que A.B = B.A = I_n donde I_n es la matriz unidad (identidad) de orden n.

Ejemplo:

Si A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ su inversa es B= $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ pues A.B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

No toda matriz tiene inversa, por ejemplo, si A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ veamos que no existe una matriz B tal que A.B = B.A = I_2

Sea B=$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$, entonces $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, o sea que $\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+u \\ 2x+z & 2y+u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de donde resulta:

$$\begin{cases} 2x+z=1 \\ 2x+z=0 \\ 2y+u=0 \\ 2y+u=1 \end{cases} \Rightarrow \quad z = 1-2x \quad \wedge \quad z = -2x \quad \Rightarrow 1-2x = -2x \Rightarrow 1 = 0 \qquad \text{lo cual es un absurdo}$$

La inversa de una matriz A, si existe, es **única** y se nota A^{-1}.

Si una matriz A tiene inversa, entonces det(A) $\neq 0$ **:**

En efecto, de $A.A^{-1} = I_n$ resulta $\det(A.A^{-1}) = \det I_n$, es decir $\det A. \det A^{-1} = 1$, por lo tanto $\det A \neq 0$ y $\det A^{-1} \neq 0$ y además

$\boxed{\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}}$ de donde deducimos la **propiedad número 10)**

- Si una matriz A tiene inversa y existe una matriz B tal que $A.B = I_n$, entonces $B = A^{-1}$:

En efecto,
si $A.B = I_n$, multiplicando a izquierda por A^{-1} se tiene
$A^{-1}.(A.B) = A^{-1}.I_n$, entonces $(A^{-1}. A).B = A^{-1}$, de donde $I_n. B = A^{-1}$, por lo tanto $B = A^{-1}$

- Si una matriz A tiene inversa y existe una matriz B tal que $B.A = I_n$, entonces $B = A^{-1}$.

La demostración es análoga a la anterior.

Adjunta de una matriz:

Si $A= (a_{ij})$ es una matriz de orden n, definimos la **matriz adjunta** de A y la notamos Adj(A) a la matriz $\text{Adj}(A) = (A_{ij})$ donde A_{ij} es el complemento algebraico del elemento a_{ij} de A.

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ buscamos $\text{Adj}(A)$

$A_{11} = 1 \cdot 3 = 3$ $\quad A_{21} = -1 \cdot 2 = -2$ $\quad A_{31} = 1 \cdot (-5) = -5$

$A_{12} = -1 \cdot (-3) = 3$ $\quad A_{22} = 1 \cdot (-2) = -2$ $\quad A_{32} = (-1) \cdot 3 = -3$

$A_{13} = 1 \cdot (-1) = -1$ $\quad A_{23} = (-1) \cdot 0 = 0$ $\quad A_{33} = 1 \cdot 1 = 1$

$$\text{Adj.}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedad: $A \cdot (\text{Adj.}(A))^t = (\text{Adj.}(A))^t \cdot A = \det A \cdot I_n$

Esta propiedad es muy importante para el cálculo de la matriz inversa de una matriz, pero su demostración excede a este curso, por lo cual sólo lo comprobaremos con la matriz del ejemplo anterior:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&3\\1&-1&0\end{pmatrix}\quad \text{Adj.}(A)=\begin{pmatrix}3&3&-1\\-2&-2&0\\-5&-3&1\end{pmatrix}\quad \left(\text{Adj.}(A)\right)^t=\begin{pmatrix}3&-2&-5\\3&-2&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot\left(\text{Adj.}(A)\right)^t=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&3\\1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-5\\3&-2&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, podemos deducir que si $\det(A)\neq 0$,

$$(\text{Adj } A)^t.\ A=A.(\text{Adj } A)^t=\det(A).I_n \Rightarrow \frac{A.\left(\text{Adj.}(A)\right)^t}{\det.(A)}=\frac{\left(\text{Adj.}(A)\right)^t.A}{\det.(A)}=I_n$$

De donde tenemos que : $\boxed{A^{-1}=\dfrac{\left(\text{Adj.}(A)\right)^t}{\det.(A)}}$

En nuestro ejemplo:

Como $\det.(A)=-2$, $\quad A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\cdot\left(\text{Adj.}(A)\right)^t$

$$-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-5\\3&-2&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/2&1&5/2\\-3/2&1&3/2\\1/2&0&-1/2\end{pmatrix}=A^{-1}$$

Cálculo de la inversa de una matriz aplicando operaciones elementales:

Dada una matriz A de orden n, si aplicando un número finito de operaciones elementales $F_1, F_2, \dots, F_k$ sobre sus filas se puede obtener la matriz unidad de orden n, entonces la matriz A es inversible y para calcular su inversa basta aplicar a la matriz unidad de orden n las mismas operaciones elementales $F_1, F_2, \dots, F_k$ y en el mismo orden. Si al aplicar operaciones elementales por filas a la matriz A, tratando de obtener la matriz unidad, se obtiene una fila nula, entonces A no es inversible.

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&1\\4&-1&5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\leftrightarrow\quad\begin{matrix}-3F_1+F_2\to F_2\\-4F_1+F_3\to F_3\end{matrix}\quad\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-5\\0&3&-3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-4&0&1\end{pmatrix}\leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}F_2 \to F_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/3 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{matrix} F_2 + F_1 \to F_1 \\ -3F_2 + F_3 \to F_3 \end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\leftrightarrow \quad \frac{1}{2}F_3 \to F_3 \quad \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 1/3 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{matrix} -\frac{1}{3}F_3 + F_1 \to F_1 \\ \frac{5}{3}F_3 + F_2 \to F_2 \end{matrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & -1/6 \\ -11/6 & -1/2 & 5/6 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Verificación: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & -1/6 \\ -11/6 & -1/2 & 5/6 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rango de una matriz:

Dada una matriz A cualquiera, si la triangulamos aplicando operaciones elementales (I, II, III), llamamos rango de A, lo notamos rg(A) al número de filas no nulas de la matriz triangulada.

Ej.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \quad F_2' \to F_2 - 2F_1 \quad \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 1$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_3 + F_1 \to F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow F_3 + 2F_2 \to F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \operatorname{rg}(B) = 2$$

<u>Proposición:</u> $A \in M_n(K)$ es inversible si y solo si $\operatorname{rg}(A) = n$

Demostración: A es inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ ninguna fila (columna) de A es combinación lineal de las restantes $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = n$