ESPACIOS VECTORIALES

Definición: Un $\mathbb{R}$ **- espacio vectorial** o **espacio vectorial sobre** $\mathbb{R}$ consiste en un conjunto no vacío V (cuyos elementos se denominan vectores) provisto de dos operaciones, una de ellas interna, llamada **suma de vectores** (indicaremos con $\vec{u}+\vec{v}$, siendo $\vec{u},\vec{v}\in V$) y otra externa llamada **producto por escalares** (indicaremos con $\lambda\vec{u}$, $\lambda\in\mathbb{R}, \vec{u}\in V$) para los cuales se verifican los siguientes axiomas:

$V_1)$ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\overrightarrow{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\overrightarrow{w}\right) \quad \forall\, \vec{u},\vec{v},\overrightarrow{w}\in V$

$V_2)$ $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \quad \forall\, \vec{u},\vec{v}\in V$

$V_3)$ $\exists\, \vec{0}\in V: \vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u} \quad \forall\, \vec{u}\in V$ (elemento neutro)

$V_4)$ $\forall\, \vec{u}\in V \quad \exists\, \vec{u}'\in V: \vec{u}+\vec{u}'=\vec{u}'+\vec{u}=\vec{0}$ (elemento opuesto)

$V_5)$ $\lambda\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v} \quad \forall\, \lambda\in\mathbb{R}, \vec{u},\vec{v}\in V$ (propiedad distributiva)

$V_6)$ $\left(\lambda+\beta\right)\cdot\vec{u}=\lambda\vec{u}+\beta\vec{u} \quad \forall\, \lambda,\beta\in\mathbb{R}, \vec{u}\in V$

$V_7)$ $\left(\lambda\cdot\beta\right)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\left(\beta\cdot\vec{u}\right) \quad \forall\, \lambda,\beta\in\mathbb{R}, \vec{u}\in V$

$V_8)$ $1\cdot\vec{u}=\vec{u} \quad \forall\, \vec{u}\in V$

De la definición se deducen las siguientes propiedades:

1)El vector $\vec{0}$, denominado vector nulo, es único

Demostración: supongamos que existe $\vec{0}'\in V: \vec{0}'+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}'=\vec{u} \quad \forall\, \vec{u}\in V$.

Entonces:

$$\vec{0}'+\vec{0}=\vec{0}+\vec{0}'=\vec{0}'.$$

Y, como la hipótesis vale para todo $\vec{u}\in V$, tenemos que

$$0'+\vec{0}=\vec{0}+\vec{0}'=\vec{0}.$$

Finalmente tenemos que $\vec{0}'=\vec{0}+\vec{0}'=\vec{0}\Rightarrow\vec{0}'=\vec{0}\Rightarrow$ el vector nulo es único.

2) Dado $\vec{u}\in V$, existe un único $\vec{u}'\in V$ tal que $\vec{u}+\vec{u}'=\vec{0}$

3) $0 \cdot \vec{u} = \vec{0} \quad \forall\, \vec{u} \in V$

Demostración:

$0 \cdot \vec{u} = (0+0)\vec{u} = 0\vec{u} + 0\vec{u}$ sumando $-0 \cdot \vec{u}$ a ambos miembros:

$-0\vec{u} + 0\vec{u} = (-0\vec{u} + 0\vec{u}) + 0\vec{u} \Rightarrow \vec{0} = \vec{0} + 0\vec{u} \Rightarrow \vec{0} = 0\vec{u}$

4) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

5) $\lambda\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \ \vee \ \vec{u} = \vec{0}$

6) $-\lambda\vec{u} = (-\lambda)\vec{u} = \lambda(-\vec{u}) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} \in V$

En particular $(-1).\vec{u} = -\vec{u}$

Ejemplos de $\mathbb{R}$ - espacios vectoriales:

1) $\mathbb{R}$, con la suma y producto usuales.

2) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b),\, a,b \in \mathbb{R}\}$

con la suma definida: $(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$

y con el producto po rescalar definido: $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$

3) $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$

con la suma $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

y el producto: $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

4) $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ con la suma de matrices y el producto de matrices por un escalar usuales.

5) $\mathbb{R}[x]$ con la suma de polinomios y el producto de polinomios por un escalar usuales.

Definición:

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, un vector $\vec{u} \in V$ se dice una combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n$

Ejemplo: Sean $\vec{v}_1$=(4,1,3), $\vec{v}_2$=(1,2,-3) ,$\vec{v}_3 = (16,9,1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$

a) Hallar la combinación lineal $3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 - \vec{v}_3$

b) Hallar $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3 + 4\vec{v} = 0$

SUBESPACIOS:

Definición: Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, un subconjunto no vacío $S \subset V$ se dice **subespacio** de V si con las operaciones heredadas de V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Proposición: Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $S \subset V$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) S es subespacio de V

2) $S_1)\ S \neq \emptyset\ \left(\text{o}\ \vec{0} \in S\right)$

$S_2)\ \vec{u},\vec{v} \in S \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in S$

$S_3)\ \vec{u} \in S,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\vec{u} \in S$

Observación: Las condiciones S_1, S_2 y S_3 son las usadas habitualmente para probar que un subconjunto S de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V es un subespacio de V.

Ejemplos:

1) $V = \mathbb{R}^2 \quad S = \{(x_1,x_2) : x_1 + x_2 = 0\}$ ¿Es S subespacio de $\mathbb{R}^2$?

$S_1)\ (0,0) \overset{?}{\in} S \qquad x_1 + x_2 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow (0,0) \in S$

$S_2)$ Si $\vec{u} = (x_1,x_2) \in S \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$

Si $\vec{v} = (y_1,y_2) \in S \Rightarrow y_1 + y_2 = 0$

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \overset{?}{\in} S:$

$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in S$

$S_3)$ Si $\vec{u} = (x_1,x_2) \in S \Rightarrow x_1 + x_2 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda\vec{u} = (\lambda x_1,\lambda x_2) \overset{?}{\in} S:$

$\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda.0 = 0 \Rightarrow \lambda.\vec{u} \in S$

Luego, S es subespacio de $\mathbb{R}^2$

2) $T = \{(x_1,x_2) : x_1 \cdot x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ¿Es T un subespacio de $\mathbb{R}^2$?

$S_1)\ (0;0) \in T$ pues $x_1 \cdot x_2 = 0 \cdot 0 = 0$;

$S_2)$Sean $\vec{u} = (x_1,x_2) \in T \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 0$ y $\vec{v} = (y_1,y_2) \in T \Rightarrow \vec{v} \Rightarrow y_1 \cdot y_2 = 0$

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$\vec{u} + \vec{v} \overset{?}{\in} T: \quad (x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 = x_1y_2 + y_1x_2$

Contraejemplo:

$(1,0) \in T\ ;\ (0,1) \in T$ sumados: $(1,1) \notin T$ pues $1.1 \neq 0$

luego, T no es subespacio

3) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y+z=0 \wedge y-z=0\}\subseteq\mathbb{R}^3$ ¿Es subespacio de $\mathbb{R}^3$?

El conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ es $S=\{(-2z,z,z),\, z\in\mathbb{R}\}$

Veamos si S es subespacio:

$S_1)$ $(0,0,0)\overset{?}{\in} S$

$(0,0,0)=(-2.0,0,0)\Rightarrow \vec{0}\in S$

$S_2)$Sean $\vec{u}\in S\Rightarrow\vec{u}=(-2z,z,z), z\in\mathbb{R}$ y $\vec{v}\in S\Rightarrow\vec{v}=(-2z',z',z'),\, z'\in\mathbb{R}$

$\vec{u}+\vec{v}=(-2z-2z',z+z',z+z')=(-2(z+z'),z+z',z+z')\in S$

$S_3)$ $\vec{u}\in S\Rightarrow\vec{u}=(-2z,z,z)$ $k\in\mathbb{R}\Rightarrow k\vec{u}=k(-2z,z,z)=(-2zk,zk,zk)\in S$

luego, S es subespacio de $\mathbb{R}^3$

Intersección de subespacios:

Si S y T son subespacios de un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial V , entonces la intersección entre S y T será: $S\cap T=\{\vec{v}\in V: \vec{v}\in S\wedge\vec{v}\in T\}$

Proposición: Si S y T son subespacios de un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial V , entonces $S\cap T$ es subespacio de V.

Demostración:

$S_1)$Como S y T son subespacios de V, $\vec{0}\in S\wedge\vec{0}\in T\Rightarrow\vec{0}\in S\cap T$

$S_2)$ Sea $\vec{u}\in S\cap T$ y $\vec{v}\in S\cap T$ tenemos que:

$\vec{u}\in S\wedge\vec{u}\in T$ y $\vec{v}\in S\wedge\vec{v}\in T$.

Como S es subespacio, $\vec{u}+\vec{v}\in S$

y como T es subespacio $\vec{u}+\vec{v}\in T$

luego $\vec{u}+\vec{v}\in S\wedge\vec{u}+\vec{v}\in T\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}\in S\cap T$.

$S_3)$Sea $\vec{u}\in S\cap T$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\vec{u}\overset{?}{\in}S\cap T$:

$\vec{u}\in S\cap T\Rightarrow\vec{u}\in S\wedge\vec{u}\in T$

Como S es subespacio, $\lambda\vec{u}\in S$

y como T es subespacio, $\lambda\vec{u}\in T$

luego, $\lambda\vec{u}\in S\cap T$

por lo tanto $S\cap T$ es subespacio de V.

Observación: la proposición anterior es válida para una familia arbitraria (finita o no) de subespacios.

Ejemplo:

Sean $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y+z=0\} \underset{\text{subesp.}}{\subseteq} \mathbb{R}^3$ y

$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 2x-y+3z=0\} \underset{\text{subesp.}}{\subseteq} \mathbb{R}^3$

$S\cap T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y+z=0 \wedge 2x-y+3z=0\}$

Por lo tanto es el subespacio de soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$

Entonces $S\cap T=\{(-4\lambda,1\lambda,3\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$

Observación: La unión de subespacios no es, en general, un subespacio, como mostramos en el siguiente ejemplo:

$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=0\} \underset{\text{subesp.}}{\subseteq} \mathbb{R}^2$

$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=0\} \underset{\text{subesp.}}{\subseteq} \mathbb{R}^2$

$S\cup T=\{\vec{v}\in V: \vec{v}\in S \vee \vec{v}\in T\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=0 \vee y=0\}$

$(0,1)\in S\cup T\,;\,(1,0)\in S\cup T\,;\,(0,1)+(1,0)=(1,1)\notin S\cup T \quad \therefore\ S\cup T$ no es subespacio.

Subespacio generado:

Definición:
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $M\subseteq V$, llamaremos <u>subespacio generado</u> por M en V, y lo notamos $\overline{M}$, al subespacio de V formado por todas las combinaciones lineales de los vectores de M.

Definición: Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $G\subseteq V$ es tal que $\overline{G}=V$, entonces G se dice un <u>sistema de generadores</u> de V. Si G es finito, V se dice <u>finitamente generado</u>.

Ejemplos:

1) Sea $S=\{(x_1,x_2,x_3): x_1+x_2+x_3=0\} \underset{\text{subesp.}}{\subseteq} \mathbb{R}^3$ hallar un conjunto de generadores de S.

$x_1=-x_2-x_3 \quad \Rightarrow (-x_2-x_3,x_2,x_3)\in S \quad (-x_2-x_3,x_2,x_3)=x_2\,(-1,1,0)+x_3\,(-1,0,1),x_2,x_3\in\mathbb{R}$

$M=\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ genera a S, $\overline{M}=S$, $\overline{\{(-1,1,0);(-1,0,1)\}}=S$

2) Dado el subespacio $T = \left\{ \left\| a_{ij} \right\| \in \mathbb{R}^{2\times 3} : a_{11} = a_{12} = 0 \right\}$

hallar un conjunto de generadores de T.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in T, \quad \text{pues } a_{11} = a_{12} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, un conjunto de generadores de T es

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

es decir $\overline{M} = T$ o $T = \overline{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$

3) Si $V = \mathbb{R}[x]$ entonces $M = \{1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...\}$ es tal que $\overline{M} = \mathbb{R}[x]$ pero V no es finitamente generado.

Dependencia lineal:

Dado un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial V y $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in V$, siempre es posible escribir al vector $\vec{0}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$, basta tomar todos los coeficientes de la combinación lineal iguales a 0. Así $\vec{0} = 0.\vec{v}_1 + 0.\vec{v}_2 + ... + 0.\vec{v}_n$

Definición: Si la única forma de escribir al vector nulo como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ es tomando todos los coeficientes 0, se dice que los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ son **linealmente independientes** o que el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ es **linealmente independiente**.

Es decir que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ es l.i. si $\lambda_1.\vec{v}_1 + \lambda_2.\vec{v}_2 + ... + \lambda_n.\vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$

Se dice que los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ son **linealmente dependientes** si no son linealmente independientes, es decir , si es posible escribir al vector nulo como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ con alguno de los coeficientes distinto de 0, o sea, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, <u>no todos nulos</u> tales que $\lambda_1.\vec{v}_1 + \lambda_2.\vec{v}_2 + ... + \lambda_n.\vec{v}_n = \vec{0}$

En tal caso, también se dice que el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ es l.d.

Ejemplos:

a) Analizar la dependencia o independencia lineal del conjunto $A = \{(1,2), (1,1), (0,1)\}$

$$\vec{0}=(0,0)=\lambda_1(1,2)+\lambda_2(1,1)+\lambda_3(0,1)\Rightarrow(0,0)=(\lambda_1+\lambda_2,2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\Rightarrow$$
$$\begin{cases}0=\lambda_1+\lambda_2\\0=2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\end{cases}$$

Tiene solución no trivial, por ejemplo $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=-1$, luego, el conjunto A es l.d.

b) Analizar la dependencia o independencia lineal del conjunto $B=\{(1,1,1),(0,1,0)\}$

$$\vec{0}=(0,0,0)=\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(0,1,0)\quad\Rightarrow(0,0,0)=(\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1)$$
$$\begin{cases}\lambda_1=0\\\lambda_1+\lambda_2=0\to\lambda_2=0\end{cases}$$

Por lo tanto B es l.i.

Observaciones:

1) $\{\vec{v}\}$ es l.i. si y sólo si $\vec{v}\neq 0$

2) Dado M = $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$, si existe $i\in\mathbb{N}$ tal que $\vec{v}_i=\vec{0}$, entonces M es l.d.

3) Si $\vec{u}\neq 0$ y $\vec{v}\neq 0$ entonces $\{\vec{u},\vec{v}\}$ es *l.d.* si y solo si $\exists\,\lambda\neq 0$ tal que $\vec{u}=\lambda\vec{v}$

4) Sea $V=\mathbb{R}^3$ y $M=\{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\}$,

M es *l.d.* si y solo si $\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=0$ y M es *l.i* si y sólo si $\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}\neq 0$

Esto puede generalizarse para n vectores de $\mathbb{R}^n$

Teorema: Sea V un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial y $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}\subseteq V$, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ es l.i.

ii) Si $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+...+\lambda_n\vec{v}_n=\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2+...+\beta_n\vec{v}_n$ entonces $\lambda_i=\beta_i$, $i=1,......,n$

iii) Ningún $\vec{v}_i$ es combinación lineal de los restantes

iv) $\vec{v}_1\neq 0$ y ningún $\vec{v}_i$ $2\leq i\leq n$ es combinación lineal de los precedentes.

Demostremos $i)\Rightarrow ii)$:

$$\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\ldots+\lambda_n\vec{v}_n=\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2+\ldots+\beta_n\vec{v}_n \;\Rightarrow\; (\lambda_1\text{-}\beta_1)\vec{v}_1+(\lambda_2\text{-}\beta_2)\vec{v}_2+\ldots+(\lambda_n\text{-}\beta_n)\vec{v}_n=\vec{0}$$

Y como por hipótesis $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ es l.i., tenemos que $(\lambda_1\text{-}\beta_1)=0,\ (\lambda_2\text{-}\beta_2)=0,\ldots,(\lambda_n\text{-}\beta_n)=0$

Por lo tanto $\lambda_i=\beta_i\ ,\quad i=1,\ldots\ldots,n$

Demostremos $ii)\Rightarrow iii)$ por contrarecíproco (es decir, suponemos que no sucede *iii*) y llegamos a que entonces no sucede *ii*):

$-iii)\Rightarrow -ii))$:

Supongamos que existe algún i , $1\le i\le n$ tal que $\vec{v}_i$ que es combinación lineal de los restantes, entonces

$$\vec{v}_i=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\ldots+\lambda_{i-1}\vec{v}_{i-1}+\lambda_{i+1}\vec{v}_{i+1}+\ldots+\lambda_n\vec{v}_n \text{ por lo tanto}$$
$$\vec{0}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\ldots+\lambda_{i-1}\vec{v}_{i-1}-\vec{v}_i+\lambda_{i+1}\vec{v}_{i+1}+\ldots+\lambda_n\vec{v}_n\ ,$$

pero $\vec{0}=0\vec{v}_1+0\vec{v}_2+\ldots+0\vec{v}_{i-1}+0\vec{v}_i+0\vec{v}_{i+1}+\ldots+0\vec{v}_n$

de donde tenemos que $\alpha_i=-1 \quad y \quad \beta_i=0$ lo cual contradice la hipótesis

Ejercicio: probar iii$)\Rightarrow$iv$)$ y iv$)\Rightarrow$i$)$

Observaciones:

1) Si M= $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ es l.i. , la manera de expresar a un vector $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de M es única.

2) Si M= $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ es l.i., todo subconjunto de M lo es.

3) Si M= $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ es l.i., entonces $\vec{v}_i\neq\vec{v}_j,\quad \forall i\neq j$

4) Si M= $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ es l.i. y $\vec{u}$ no es combinación lineal de ellos, entonces $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n,\vec{u}\}$ es l.i.

Bases:

Definición: Sea V un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial. Un subconjunto B de V (B$\subset$ V) se dice una **base** de V si: B_1) B es linealmente independiente B_2) B genera a V (V=$\overline{\text{B}}$)

Es decir, una base B de un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial V es un conjunto de vectores linealmente independientes que genera a V, lo que es equivalente a decir que todo vector de V se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de B. En este curso trabajaremos con bases finitas.

Nota: Un subconjunto $B' \subset V$ se dice base de un subespacio $S \subseteq V$ si B' es l.i. y $S = \overline{B'}$

Ejemplos:

1) Si $V = \{\vec{0}\}$ $B = \varnothing$ es base de V

2) Si $V = \mathbb{R}^n$ $C = \{(1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,0,...,1)\}$ es llamada la base canónica de $\mathbb{R}^n$

3) Si $V = \mathbb{R}^3$ $B = \{(1,-1,0),(0,1,0),...,(2,1,3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. En efecto:

✓ B es linealmente independiente pues:

$\lambda_1(1,-1,0)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(2,1,3)=(0,0,0)$ implica que

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

✓ B genera $\mathbb{R}^3$ ya que si
$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow (x,y,z)=\lambda_1(1,-1,0)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(2,1,3)$

entonces $(x,y,z)=\left(x-\frac{2}{3}z\right)(1,-1,0)+(x+y-z)(0,1,0)+\left(\frac{z}{3}\right)(2,1,3)$

por lo tanto, B es l.i y genera $\mathbb{R}^3$, luego, B es base de $\mathbb{R}^3$

Definición:
SeaVun $\mathbb{R}$-espacio vectorial, diremos que V tiene dimensión *n* sobre $\mathbb{R}$ si posee una base con *n* vectores. Se nota: $\dim_{\mathbb{R}} V = n$

Algunos resultados sobre bases:

1) Todo $\mathbb{R}$-espacio vectorial V tiene una base

2) Si $V = \overline{\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_r\}}$ y $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_t\} \subseteq V$ es $l.i. \Rightarrow t \le r$

3) Todo conjunto de vectores linealmente independientes se extiende a una base de V

4) Si $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_s\}$ y $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_t\}$ son dos bases de $V \Rightarrow s=t$

Observaciones:

1) Si S es un subespacio de V entonces $\dim_{\mathbb{R}}(S) \le \dim_{\mathbb{R}}(V)$

2) Si $\dim_{\mathbb{R}}(V)=n$ entonces:

   i) Todo conjunto de vectores con más de n elementos es linealmente dependiente

   ii) B= $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ es base de V si y solo si B es l.i.

3) Si $V=\{\overline{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_k}\}$ entonces $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ es el número máximo de vectores l. i. existentes entre los k generadores.

Componentes:

Una de las características de una base B de un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial V de dimensión n, es que permite introducir componentes en V en forma análoga a las de un vector $\vec{v}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Dada una base $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ y $\vec{x}\in V$, ¿cómo quedan determinadas las componentes de $\vec{x}$?.

Se obtienen a partir de la unicidad de la expresión de $\vec{x}$ como combinación lineal de los vectores de la base B. Si B es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ se puede decir cual es la i-esima componente porque se tiene un orden natural, si B es una base arbitraria se lo debe fijar. Necesitamos entonces el concepto de **Base Ordenada.**

Definición: Si V es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión n, una base ordenada es una sucesión $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n$ de vectores linealmente independientes que generan V.

Observación: Si la sucesión $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n$ es base ordenada entonces $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ es base base de V. Por abuso de notación escribiremos $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ para notar a la base ordenada B. Tener en cuenta que $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ es distinta de $B'=\{\vec{v}_2,\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}$ como bases ordenadas pero iguales como conjuntos.

Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión n y $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ una base ordenada de V, dado $\vec{x}\in V$ existe una única n-upla $(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tal que

$\vec{x}=x_1\vec{v_1}+x_2\vec{v_2}+........+x_n\vec{v_n}$, x_i se denomina la i-ésima componente de $\vec{x}$ respecto de la base B.

Recíprocamente si $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $\vec{x} = x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + ... + x_n\vec{v_n}$ es tal que sus componentes respecto a B son $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Fijada la base ordenada B hemos establecido una correspondencia biunívoca entre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V y $\mathbb{R}^n$.

Observemos que si $\vec{x} = x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + ... + x_n\vec{v_n}$, $\vec{y} = y_1\vec{v_1} + y_2\vec{v_2} + ... + y_n\vec{v_n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1)\vec{v_1} + (x_2 + y_2)\vec{v_2} + ... + (x_n + y_n)\vec{v_n}$$

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1)\vec{v_1} + (\lambda x_2)\vec{v_2} + ... + (\lambda x_n)\vec{v_n}$$