VECTORES

Introducción

El concepto de **vector** fue utilizado desde finales del siglo XVII para representar y componer magnitudes con dirección y sentido, como son la Fuerza o la Velocidad.
Es a finales del XVIII cuando Lagrange introduce las coordenadas, con lo que se aritmetiza el cálculo con magnitudes vectoriales.
Gauss los utilizó para representar los números complejos.
En el siglo XIX, Möbius se sirve de los vectores para resolver problemas geométricos, dándole sentido a las coordenadas. El primero que utiliza, en este siglo, la palabra vector es Hamilton.
Finalmente Grassmann amplió la teoría de vectores generalizándola a espacios de dimensión(n).

Definición y Operaciones.

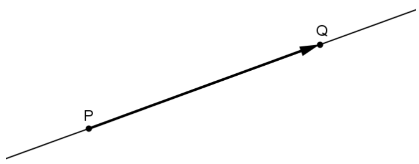
Consideremos P y Q dos puntos del plano o del espacio y el segmento por ellos determinado. Si P y Q están dados en cierto orden, por ejemplo P el "origen" y Q el "extremo", decimos que el segmento está orientado.

Definición: Se llama **vector** a todo segmento orientado. Habitualmente al vector se le designa con una flecha encima de una letra minúscula: $\vec{u}$ (por ejemplo) o bien mediante uno de sus representantes escribiendo el orígen y el extremo con una flecha encima: $\overrightarrow{PQ}$ (por ejemplo)

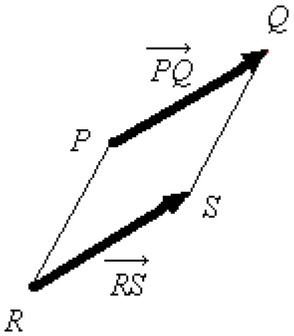
Dirección: Si $P \neq Q$, la dirección de $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ es la de la recta L que lo contiene (o paralela).

Módulo: Se llama módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$ a la longitud del segmento que lo define. Lo notamos $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$

Sentido: Está dado por la orientación sobre la recta determinada por el origen P y el extremo Q.



Observaciones:
1) $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| \geq 0$ para todo par de puntos P y Q. Si P =Q, $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{PP}\right\| = \left\|\vec{0}\right\| = 0$
Lo que caracteriza al vector nulo como aquel vector que tiene módulo 0.
2) Todos los vectores no nulos situados sobre una misma recta o rectas paralelas tienen la misma dirección.



Igualdad de Vectores

Dos vectores son "**iguales**" si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Los vectores: $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ cumplen las tres condiciones de igualdad, de ahí que cuando queramos hacer uso de un vector podamos tomar uno cualquiera de los que son iguales a él.

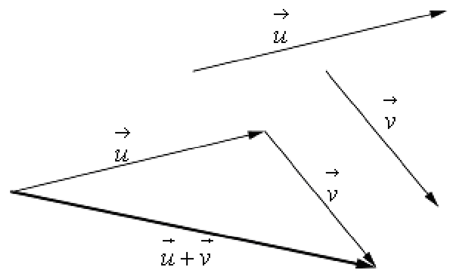
Con este criterio de igualdad todos los vectores pueden ser trasladados de modo que tengan un mismo origen O. De esta manera cada vector y sus iguales tendrán un único representante entre los vectores con origen O. Se dice entonces que trabajamos con vectores libres. Al conjunto de los vectores libres del plano o del espacio lo notaremos E_2 y E_3 respectivamente. Si no es necesario distinguirlos los notaremos V.

SUMA Y RESTA DE VECTORES.

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cualesquiera.

Para poder sumarlos hay que tomar un representante de cada uno de ellos de modo tal que el origen de $\vec{v}$ coincida con el extremo de $\vec{u}$.

En ese caso el vector suma: $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector cuyo orígen es el origen de $\vec{u}$ y cuyo extremo es el extremo de $\vec{v}$.



Propiedades de la suma:

1) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right) \quad \forall\, \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$

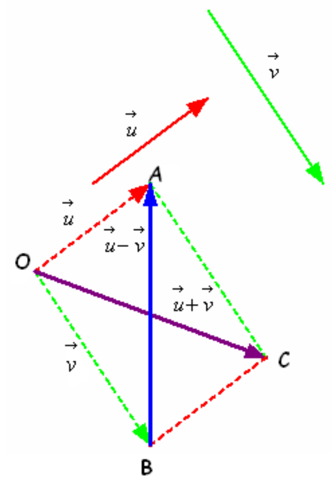
2) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \quad \forall\, \vec{u},\vec{v}\in V$

3) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u} \quad \forall\, \vec{u}\in V$

4) Para cada $\vec{u}\in V$ existe un único $\vec{u}\,'\in V$ tal que $\vec{u}+\vec{u}\,'=\vec{0}$

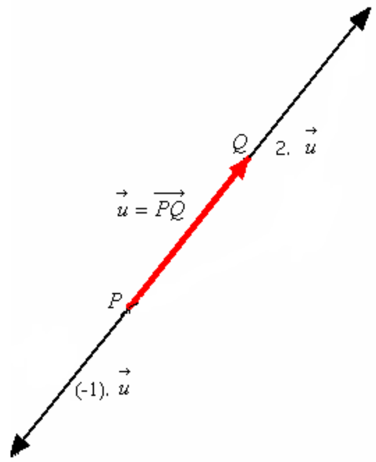
<u>**Observaciones:**</u>

1) A $\vec{u}\,'$ se lo nota generalmente $-\vec{u}$
2) Si $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}$ *entonces* $-\vec{u}=\overrightarrow{QP}$
3) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se consideran con origen común O, es decir $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$, con O,A y B puntos distintos y no alineados, entonces $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OC}$ de modo que O,A,B y C forman un paralelogramo. En tal caso decimos que para sumar vectores utilizamos la <u>regla del paralelogramo.</u>



Resta: El vector resta: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ gráficamente es el vector con origen en el extremo de extremo de $\vec{v}$ y extremo en el extremo de $\vec{u}$.

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN NÚMERO



Dado un número $k \neq 0$ y un vector $\vec{u}$ definimos el vector $k.\vec{u}$ como aquel que:

- tiene la misma dirección que $\vec{u}$.
- el mismo sentido que $\vec{u}$ si $k > 0$ y

sentido contrario al de $\vec{u}$ si $k < 0$

- su módulo es igual al de $\vec{u}$ multiplicado por el valor absoluto de: $|k|$. Es decir $\left\| k.\vec{u} \right\| = |k| \left\| \vec{u} \right\|$

Si $k = -1$ el vector $k\,\vec{u}$ será el opuesto del vector $\vec{u}$

En el caso en que $k = 0$ el vector $k\,\vec{u}$ es el vector cero: $\vec{0}$ cuyo extremo y origen coinciden.

Propiedades:

$$1)\ \lambda.\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{u},\vec{v} \in V$$

$$2)\ \left(\lambda + \mu\right).\vec{v} = \lambda.\vec{v} + \mu.\vec{v} \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V$$

$$3)\ \left(\lambda.\mu\right).\vec{v} = \lambda.\left(\mu.\vec{v}\right) \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V$$

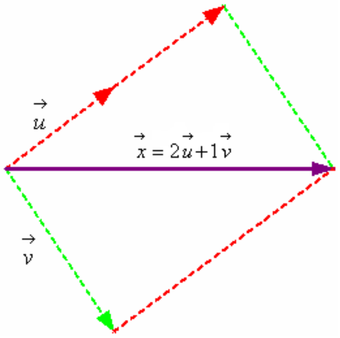
$$4)\ 1.\vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$$

Observaciones:

1) Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ podemos considerar el vector $\dfrac{1}{\left\| \vec{u} \right\|}.\vec{u}$, que tiene igual dirección y sentido que $\vec{u}$, módulo 1 y se lo denomina <u>versor</u>.

2) Dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos si $\vec{u} = \lambda.\vec{v} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

3) $-\left(\lambda.\vec{u}\right) = \left(-\lambda\right).\vec{u} = \lambda.\left(-\vec{u}\right) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} \in V$



Definición: Dados los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \ldots\ldots, \vec{v}_n$ y los números: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$ la expresión:

$$\lambda_1\,\vec{v}_1 + \lambda_2\,\vec{v}_2 + \ldots\ldots + \lambda_n\,\vec{v}_n$$

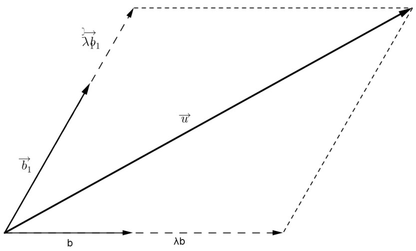
se llama **combinación lineal** de dichos vectores.

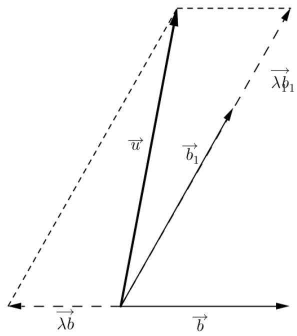
En el ejemplo, el vector $\vec{x}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Decimos que varios vectores son **linealmente dependientes** si alguno de ellos es combinación lineal de los restantes.
Cuando no es así, se dice que son **linealmente independientes**.

Así en el ejemplo de más arriba el vector $\vec{x}$ es coplanar con los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, $\vec{x}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ pues se escribe $\vec{x} = 2\vec{u} + 1\vec{v}$.

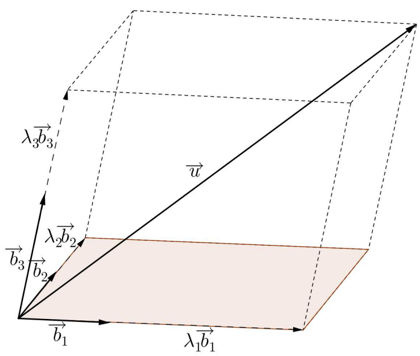
Bases de E_2 y E_3

Dados dos vectores $\overrightarrow{b_1}\ y\ \overrightarrow{b_2}$ no nulos ni paralelos, todo vector $\vec{u}$ del plano puede escribirse como combinación lineal de $\overrightarrow{b_1}\ y\ \overrightarrow{b_2}$. En tal caso se dice que $B = \left\{\overrightarrow{b_1}\ ,\ \overrightarrow{b_2}\right\}$ es una **base** de E_2.



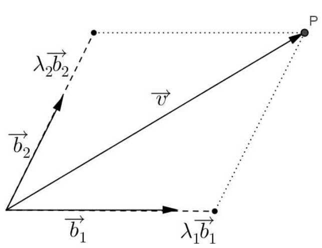


En E_3, dados **tres vectores** $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, **no nulos, ni paralelos a un mismo plano** es posible escribir a cualquier vector $\vec{u}$ de ese espacio como combinación lineal de ellos.
Se dice entonces que $B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ es una **base** de E_3.



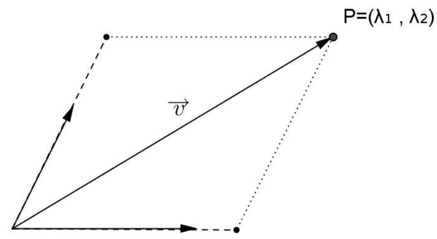
Los vectores y el plano cartesiano:

Los elementos de V son de naturaleza geométrica, queremos obtener una expresión numérica de los vectores a fin de efectuar con ellos cálculos en forma eficiente. Sea O un punto del plano y $B = \left\{\overrightarrow{b_1}\ ,\ \overrightarrow{b_2}\right\}$ una base ordenada de E_2. La base B y O determinan en el plano un sistema de coordenadas cartesianas (O,XY).



Sea $\vec{v}$ un vector del plano, como $B=\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\}$ es base ordenada, $\vec{v}$ se escribe de manera única en la forma $\vec{v}=\lambda_1\overrightarrow{b_1}+\lambda_2\overrightarrow{b_2}$

Entonces al vector $\vec{v}$ le podemos asociar el par ordenado (λ_1,λ_2) . Los números reales λ_1, λ_2 se denominan las componentes del vector $\vec{v}$ en la base B.



Notemos que si $\vec{u}=\lambda_1\overrightarrow{b_1}+\lambda_2\overrightarrow{b_2}$ y $\vec{v}=\mu_1\overrightarrow{b_1}+\mu_2\overrightarrow{b_2}$,

$\vec{u}+\vec{v}=\lambda_1\overrightarrow{b_1}+\lambda_2\overrightarrow{b_2}+\mu_1\overrightarrow{b_1}+\mu_2\overrightarrow{b_2}=(\lambda_1+\mu_1)\overrightarrow{b_1}+(\lambda_2+\mu_2)\overrightarrow{b_2}$ y

$k.\vec{u}=k.(\lambda_1\overrightarrow{b_1}+\lambda_2\overrightarrow{b_2})=k\lambda_1\overrightarrow{b_1}+k\lambda_2\overrightarrow{b_2}$

En forma abreviada escribimos:

$(\lambda_1,\lambda_2)+(\mu_1,\mu_2)=(\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2)$

$k(\lambda_1,\lambda_2)=(k\lambda_1,k\lambda_2)$

Que es la manera natural de algebrizar el conjunto: $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Por lo tanto podemos identificar a E_2 con $\mathbb{R}^2$. De manera análoga se efectúa la identificación entre E_3 y $\mathbb{R}^3$.

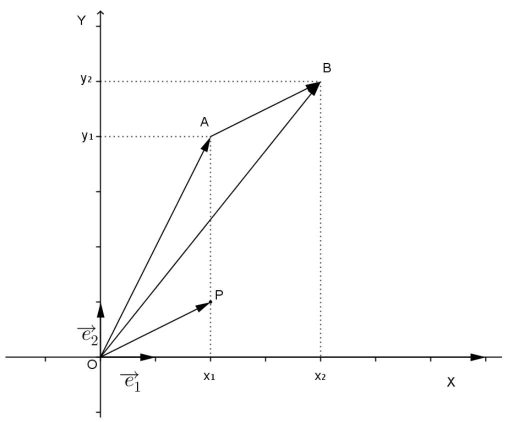
A partir de ahora, salvo que se indique lo contrario, trabajaremos siempre con sistemas de coordenadas ortogonales.

Las bases ordenadas $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$, cuyos vectores se representan por segmentos perpendiculares dos a dos y de módulo 1, se conocen con el nombre de bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

Nota: En adelante serán utilizadas indistintamente $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$ ó $\{i, j\}$ para nombrar la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ ó $\{i, j, k\}$ para la base canónica de $\mathbb{R}^3$

Sea (O, XY) un sistema de coordenadas ortogonales, A (x_1, y_1)
Y B (x_2, y_2) puntos del plano. Consideremos el vector $\overrightarrow{AB}$, queremos encontrar las componentes (λ_1,λ_2) del mismo, es decir, las coordenadas del punto P de modo que $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$

Como $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ se tiene que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}$
Y entonces $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$



En función de las componentes, este resultado se expresa como:
$(\lambda_1,\lambda_2)=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1)$
Por lo tanto el extremo P del vector $\overrightarrow{OP}$ que representa al vector $\overrightarrow{AB}$ tiene coordenadas (x_2-x_1,y_2-y_1) .

Producto escalar de dos vectores. Propiedades.

Se define el producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, notado por $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ ó $<\vec{u},\vec{v}>$, como el **número**:

$\vec{u}\,.\,\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$ siendo θ **el ángulo comprendido entre** $\vec{u}$ y $\vec{v}$

- Si θ es agudo, $\cos\theta>0$ y por tanto: $\vec{u}\,.\,\vec{v}>0$
- Si θ es obtuso, $\cos\theta<0$ y por tanto: $\vec{u}\,.\,\vec{v}<0$

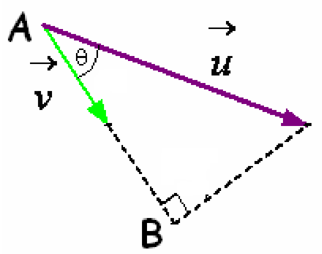
Propiedad fundamental del producto escalar.
El producto escalar de dos vectores no nulos es cero si y solamente si ambos son ortogonales. Es decir:

$$\vec{u}\neq\vec{0} \text{ y } \vec{v}\neq\vec{0}\,;\quad \vec{u}\,.\,\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$$

Otras propiedades del producto escalar.

- **Conmutatividad del producto escalar:** $\vec{u}\,.\,\vec{v}=\vec{v}\,.\,\vec{u}$
- **Propiedad asociativa:** $\lambda(\vec{u}\,.\,\vec{v})=(\lambda\vec{u})\,.\,\vec{v}=\vec{u}\,.\,(\lambda\vec{v})$
- **Propiedad distributiva:** $\vec{u}\,.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\,.\,\vec{v}+\vec{u}\,.\,\vec{w}$
- **Módulo de un vector:** $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\,.\,\vec{u}}$
- **Àngulo de dos vectores:** $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$
- **Vector proyección:**

La longitud del segmento (AB), que llamaremos **segmento proyección**, es:



$$\|\vec{u}\| \cos\theta = \|\vec{u}\| \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

con signo + ó - según sea (θ) agudo u obtuso.

Si al segmento proyección lo multiplicamos por el vector unitario $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$,

es decir $\frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\,\frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v}$

obtenemos lo que se conoce como el **vector proyección de** $\vec{u}$ **sobre** $\vec{v}$:

$$\frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{v}\|^{2}}\,\vec{v}$$

Expresión analítica del producto escalar.
Si consideramos una **base ortonormal** (una base compuesta por vectores de módulo 1 y ortogonales dos a dos) del espacio tridimensional, a la que simbolizamos $B=\{i, j, k\}$, es fácil comprobar que:

$i.i=1$; $j.j=1$; $k.k=1$ $\qquad$ $i.j=0$; $i.k=0$; $j.k=0$

Si las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en la base $B=\{i, j, k\}$ son:

$\vec{u}=(a,b,c)$ $\vec{v}=(a',b',c')$ el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se obtiene:

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v}=a\,a'+b\,b'+c\,c'}$$

Ejemplo.-
Las coordenadas de tres vectores respecto de una base ortonormal, son:

$$\vec{u}=(\mathbf{3},-\mathbf{1},\mathbf{5}) \quad \vec{v}=(\mathbf{4},\mathbf{7},\mathbf{11}) \quad \vec{w}=(-\mathbf{2},k,\mathbf{3}).$$

A) Calcular $\vec{u}\,.\,\vec{v}$

B) Determinar (k) para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares.

A) $\vec{u}\,.\,\vec{v}=(\mathbf{3})\;(\mathbf{4})+(-\mathbf{1})\;(\mathbf{7})+(\mathbf{5})\,(\mathbf{11})=\mathbf{60}$

B) $\mathbf{0}=\vec{v}\,.\,\vec{w}=(\mathbf{4})\,(-\mathbf{2})+(\mathbf{7})\,(k)+(\mathbf{11})\,(\mathbf{3})=-\mathbf{8}+\mathbf{7}k+\mathbf{33}$

$7k=-25 \Rightarrow k=\frac{-25}{7}$

Si $\vec{u}=(a,b,c)$ $\vec{v}=(a',b',c')$ son las componentes respecto de la base $B=\{i,j,k\}$
:

Módulo de un vector

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Àngulo de dos vectores $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}=\dfrac{a\,a'+b\,b'+c\,c'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{(a')^2+(b')^2+(c')^2}}$

Proyección de $\vec{u}$ <u>sobre</u> $\vec{v}$

Segmento proyección: $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\dfrac{a\,a'+b\,b'+c\,c'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2+(c')^2}}$

Vector proyección: $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}=\dfrac{a\,a'+b\,b'+c\,c'}{(a')^2+(b')^2+(c')^2}\,(a',b',c')$

Ejemplo.- Si $\vec{u}=(\mathbf{3},\mathbf{-4},\mathbf{12})$ $\vec{v}=(\mathbf{5},\mathbf{-2},\mathbf{-6})$ $\vec{w}=(\mathbf{7},k,\mathbf{-2})$ en la base $B=\{i,j,k\}$

Calcula: a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ b) $\|\vec{u}\|$ y $\|\vec{v}\|$ c) ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

d) vector proyección de $\vec{u}$ <u>sobre</u> $\vec{v}$ e) Determinar (k) para que $\vec{u}\perp\vec{w}$.

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-49$ b) $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=13$ $\|\vec{v}\|=\sqrt{65}$

c) $\cos\theta=\dfrac{a\,a'+b\,b'+c\,c'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{(a')^2+(b')^2+(c')^2}}=-0,467$; $\theta=117^{\circ}\,52'$

d) <u>Segmento proyección</u>: $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\dfrac{a\,a'+b\,b'+c\,c'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2+(c')^2}}=\dfrac{-49}{\sqrt{65}}\Rightarrow$

<u>Vector proyección</u>: $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}=\dfrac{a\,a'+b\,b'+c\,c'}{(a')^2+(b')^2+(c')^2}\,(a',b',c')=\dfrac{-49}{65}\,(5,-2,-6)$

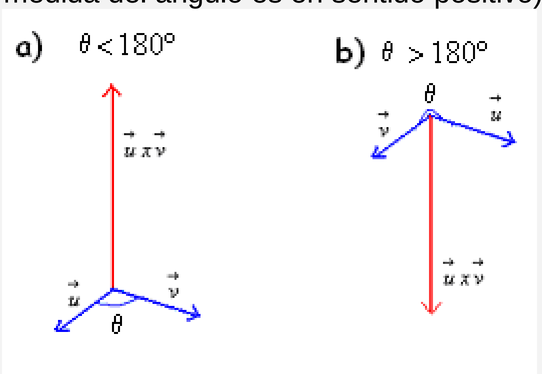
e) $\vec{u} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{w} = 0$; $\quad k = \dfrac{-3}{4}$

Producto vectorial de dos vectores. Propiedades.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$, notado por $\vec{u} \, x \, \vec{v}$ ó $\vec{u} \wedge \vec{v}$, es el **vector** que se define del siguiente modo:

Si $\vec{u}, \vec{v}$ son(LI), entonces el vector $\vec{u} \, x \, \vec{v}$ se caracteriza por:

- **Módulo:** $\left\| \vec{u} \, x \, \vec{v} \right\| = \left\| \vec{u} \right\| . \left\| \vec{v} \right\| . \left| sen\, \theta \right|$ siendo θ el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- **Dirección: ortogonal** a ambos, es decir: $(\vec{u} \, x \, \vec{v}).\vec{u} = 0$ y $(\vec{u} \, x \, \vec{v}).\vec{v} = 0$
- **Sentido:** depende del ángulo que forman los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ siendo:
  a) positivo si $\theta < 180º$ b) negativo si $\theta > 180º$
  (recordemos que la medida del ángulo es en sentido positivo).



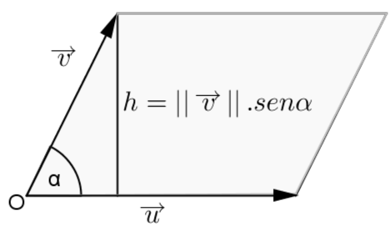
Si $\vec{u}, \vec{v}$ son(LD), es decir que alguno de ellos es el vector $\vec{0}$ o ambos tienen la misma dirección, entonces el vector $\vec{u} \, x \, \vec{v}$ es el vector cero,es decir, $\vec{u} \, x \, \vec{v} = \vec{0}$.

Propiedades del producto vectorial de dos vectores.-

- El módulo del vector $\left(\vec{u} \, x \, \vec{v} \right)$ es igual al área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

  Área del paralelogramo $= \left\| \vec{u} \, x \, \vec{v} \right\|$

  (área paralelogramo = base por altura)



- $\vec{u}\, x\, \vec{u} = \vec{0}$ cualquiera que sea $\vec{u}$
- $(\vec{u}\, x\, \vec{v}) = -\left(\vec{v}\, x\, \vec{u}\right)$ pues son dos vectores que tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos.
- $\left(\lambda\, \vec{u}\right) x\, \vec{v} = \lambda\left(\vec{u}\, x\, \vec{v}\right) = \vec{u}\, x\left(\lambda\, \vec{v}\right)$ siendo λ una constante cualquiera.
- $(\vec{u}\, x\, \vec{v})x\, \vec{w}$ *no es igual a* $\vec{u}\, x\left(\vec{v}\, x\, \vec{w}\right)$ (no es asociativo).
- $\vec{u}\, x\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}\, x\, \vec{v} + \vec{u}\, x\, \vec{w}$ (propiedad distributiva).

A partir de las propiedades vistas tenemos que los vectores de la base $B = \{i, j, k\}$ cumplen las igualdades:

a) $i\, x\, i = j\, x\, j = k\, x\, k = \vec{0}$ b) $i\, x\, j = k$ c) $j\, x\, i = -k$
d) $j\, x\, k = i$ e) $k\, x\, j = -i$ f) $k\, x\, i = j$ g) $i\, x\, k = -j$

Expresión analítica de $\vec{u}\, x\, \vec{v}$

Si $\vec{u} = (a, b, c)$ $\vec{v} = (a', b', c')$ son las componentes respecto de la base $B = \{i, j, k\}$

Tenemos que:

$$\vec{u}\, x\, \vec{v} = (ai + bj + ck)x(a'i + b'j + c'k) =$$

$$= a.a'\underbrace{(i\, x\, i)}_{\vec{0}} + a.b'\underbrace{(i\, x\, j)}_{k} + a.c'\underbrace{(i\, x\, k)}_{-j} + b.a'\underbrace{(j\, x\, i)}_{-k} + b.b'\underbrace{(j\, x\, j)}_{\vec{0}} + b.c'\underbrace{(j\, x\, k)}_{i} + c.a'\underbrace{(k\, x\, i)}_{j} +$$

$$+ c.b'\underbrace{(k\, x\, j)}_{-i} + c.c'\underbrace{(k\, x\, k)}_{\vec{0}} =$$

$$= a.b'.k - a.c'.j - b.a'.k + b.c'.i + c.a'.j - c.b'i = b.c'.i - c.b'i - a.c'.j + c.a'.j +$$

$$+ a.b'.k - b.a'.k =$$

$$= (b.c' - c.b')i + (c.a' - a.c')j + (a.b' - b.a')k = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

Módulo:

$$\left\| \vec{u}\, x\, \vec{v} \right\|^2 = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2$$

Dirección: el vector dado es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Efectivamente:

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{u}\ x\ \vec{v}\right)=\left(a,b,c\right)\cdot\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix},\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right)=$$

$$=a\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=0$$

ídem para $\vec{v}\cdot\left(\vec{u}\ x\ \vec{v}\right)$.

Ejemplo.-Determinar un vector de módulo 9 ortogonal a los vectores:

$$\vec{u}=\left(3,2,-2\right)\quad \vec{v}=\left(-1,1,4\right)$$

El vector $(\vec{u}\ x\ \vec{v})\perp\vec{u}$ y también $(\vec{u}\ x\ \vec{v})\perp\vec{v}$

$$\vec{u}\ x\ \vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=10i-10j+5k=\left(10,-10,5\right)$$

$$\left\|\vec{u}\ x\ \vec{v}\right\|=\sqrt{(\vec{u}\ x\ \vec{v}).(\vec{u}\ x\ \vec{v})}=\sqrt{10^2+(-10)^2+5^2}=\sqrt{225}=15$$

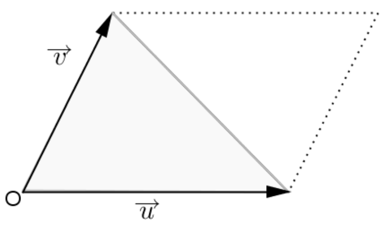
Un vector unitario en la dirección de $(\vec{u}\ x\ \vec{v})$ es: $\dfrac{1}{\left\|\vec{u}\ x\ \vec{v}\right\|}\left(\vec{u}\ x\ \vec{v}\right)$

$$\frac{1}{\left\|\vec{u}\ x\ \vec{v}\right\|}\left(\vec{u}\ x\ \vec{v}\right)=\frac{1}{15}\left(10,-10,5\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

y por lo tanto basta multiplicar por 9:

$$9\,\frac{1}{\left\|\vec{u}\ x\ \vec{v}\right\|}\left(\vec{u}\ x\ \vec{v}\right)=\frac{9}{15}\left(10,-10,5\right)=\left(6,-6,3\right)\quad \text{o su opuesto}\quad \left(-6,6,-3\right)$$

Ejemplo.- Dos de los lados de un triángulo son los vectores $\vec{u}=\left(3,-5,1\right)$ y $\vec{v}=\left(4,7,6\right)$. Calcular su área.



El área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{u}=\left(3,-5,1\right)$ $\vec{v}=\left(4,7,6\right)$ es igual al módulo del producto vectorial de ambos, es decir:

$$\vec{u}\ x\ \vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}=\left(-37,-14,41\right)$$

Entonces el área del paralelogramo es

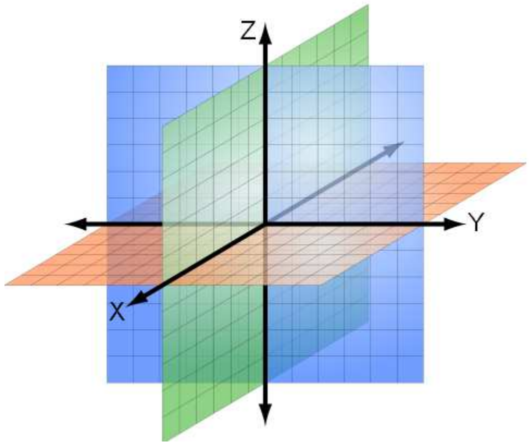
$$\left\| \vec{u} \; x \; \vec{v} \right\| = \left\| (-37, -14, 41) \right\| = \sqrt{(-37)^2 + (-14)^2 + (41)^2} = \sqrt{3246}$$

Luego, el área pedida será A= $\frac{1}{2}\sqrt{3246}$

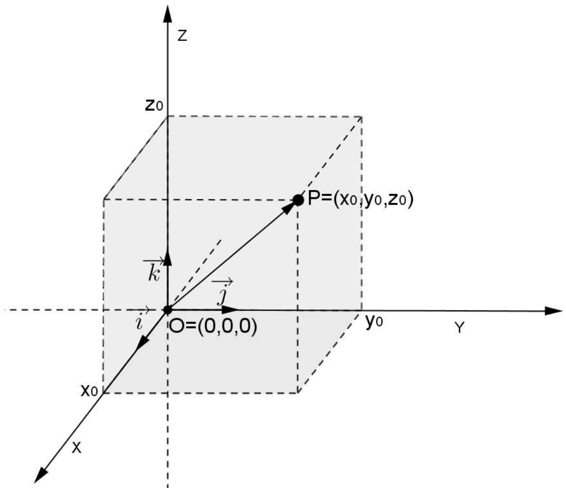
Puntos, Rectas y Planos en el espacio.-

Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales tridimensionales

En un espacio euclídeo tridimensional, un sistema de coordenadas cartesianas se define por tres ejes ortogonales de igual escala.



Cada una de las coordenadas de un punto **P** está dada por el segmento proyección del vector de posición de dicho punto sobre cada uno de los ejes coordenados X, Y, Z, en ese orden.



En el gráfico

$\overrightarrow{OP} = (x_0, y_0, z_0) = x_0 . i + y_0 . j + z_0 . k$, pues:

x_0 es el segmento proyección de $\overrightarrow{OP}$ sobre el eje X,

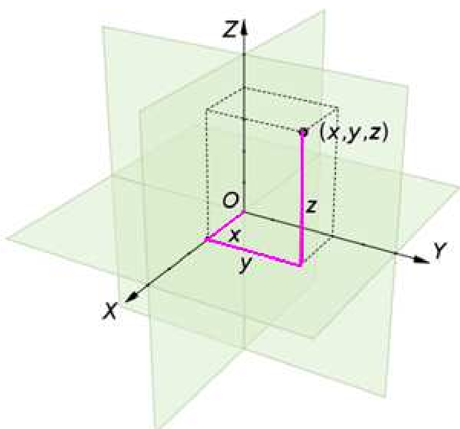
y_0 es el segmento proyección de $\overrightarrow{OP}$ sobre el eje Y,

z_0 es el segmento proyección de $\overrightarrow{OP}$ sobre el eje Z.

Cada uno de los ejes está definido por el origen de coordenadas y un vector que da la dirección. Por ejemplo, el eje *x* está definido por el origen de coordenadas *O* y el versor i .

De este modo, la coordenada x_0 del punto P, es igual al segmento proyección del vector de posición de dicho punto sobre el eje X:

$$x_0 = \frac{\overrightarrow{OP}. i}{\| i \|} = \overrightarrow{OP} \cdot i$$



Comprendido esto, para graficar un punto (x,y,z) en un sistema de ejes coordenados tridimensional, procedemos como muestra la ilustración, sin necesidad de recurrir al vector posición:

Ejercicio:

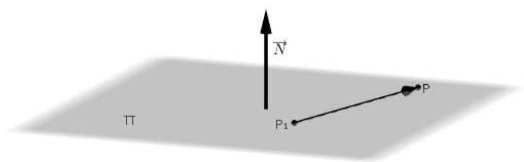
Representar los siguientes puntos en un sistema de ejes coordenados tridimensional

$$P(5,2,3) \quad Q(3,-2,5) \quad R(1,4,0) \quad S(0,0,4) \quad T(0,6,3)$$

Ecuación del Plano:

Teorema: Cualquier plano en un sistema coordenado rectangular tridimensional, se puede representar por una ecuación lineal. Recíprocamente, la gráfica de una ecuación lineal es un plano.

Demostración: Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ está en un plano dado y $\overrightarrow{N} = Ai + Bj + Ck$, distinto de cero es perpendicular (normal) al plano, se debe verificar que para cualquier punto P del plano $<\overrightarrow{N}, \overrightarrow{P_1P}> = \mathbf{0}$, como las componentes de $\overrightarrow{N}$ son (A,B,C) y las de $\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, resulta



$$A.(x - x_1) + B.(y - y_1) + C.(z - z_1) = \mathbf{0}$$
$$A.x + B.y + C.z + (-A.x_1 - B.y_1 - C.z_1) = \mathbf{0}$$

Es la ecuación del plano que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{N} = Ai + Bj + Ck$.

Se puede sustituir $(-A.x_1 - B.y_1 - C.z_1)$ por D y la ecuación del plano en la **forma general** queda : $A.x + B.y + C.z + D = \mathbf{0}$

Recíprocamente, si hallamos un $P_1(x_1, y_1, z_1)$ que satisfaga la ecuación $A.x + B.y + C.z + D = \mathbf{0}$, queda $A.x_1 + B.y_1 + C.z_1 + D = \mathbf{0}$

Luego restando

$$\begin{array}{rl} & A.x + B.y + C.z + D = \mathbf{0} \\ - & A.x_1 + B.y_1 + C.z_1 + D = \mathbf{0} \\ \hline & A.(x - x_1) + B.(y - y_1) + C.(z - z_1) = \mathbf{0}. \end{array}$$

Lo cual muestra que el plano es perpendicular a $\overrightarrow{N} = Ai + Bj + Ck$ y pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$

<u>EJEMPLO 1:</u> Escribir la ecuación del plano que contiene al punto $P_1(\mathbf{4}, -\mathbf{3}, \mathbf{2})$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{N} = \mathbf{2}\,i - \mathbf{3}\,j + \mathbf{5}\,k$

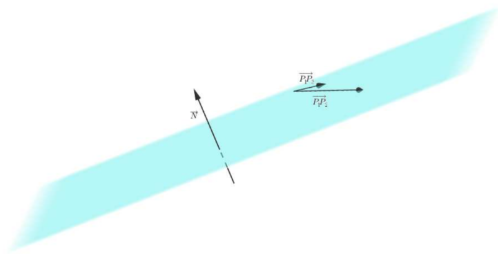
Solución: la ecuación de todo plano perpendicular al vector dado estará dada por

$$\mathbf{2}.x - \mathbf{3}.y + \mathbf{5}.z + D = \mathbf{0}$$

Como $P_1(\mathbf{4}, -\mathbf{3}, \mathbf{2})$ pertenece al plano, tenemos $\mathbf{2}.\mathbf{4} - \mathbf{3}.(-\mathbf{3}) + \mathbf{5}.\mathbf{2} + D = \mathbf{0}$, de donde D= -27 y, por lo tanto, la ecuación pedida es $\mathbf{2}.x - \mathbf{3}.y + \mathbf{5}.z - \mathbf{27} = \mathbf{0}$

<u>EJEMPLO 2:</u> Hallar la ecuación del plano determinado por los puntos $P_1(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{6}),\ P_2(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{1})\ y\ P_3(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5})$

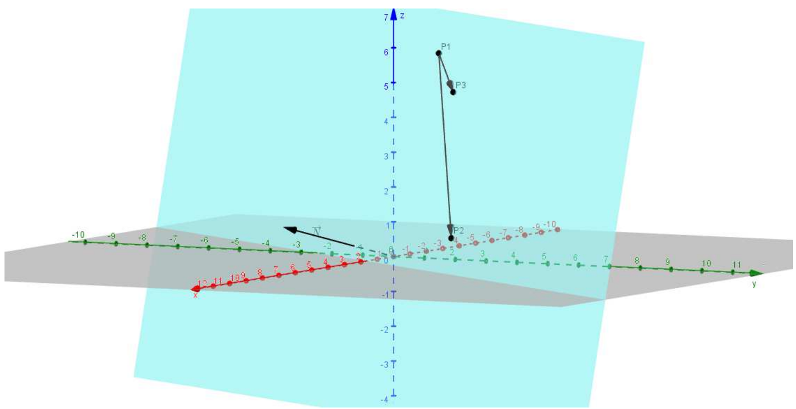
Solución:
Si bien no tenemos como dato el vector normal, cualquier vector (obviamente no nulo) que sea ortogonal a dos vectores no paralelos ni alineados del plano, será el vector normal que buscamos.



Consideremos entonces los vectores

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{3}i + \mathbf{2}j - \mathbf{5}k$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = i + j - k$$
$$\overrightarrow{N} = A.i + B.j + C.k$$

Y teniendo en cuenta que $\overrightarrow{N} = Ai + Bj + Ck$ es perpendicular a ambos, planteamos los productos escalares :

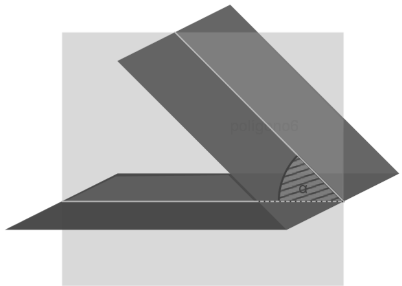


$$\left.\begin{aligned} <\overrightarrow{N}, \overrightarrow{P_1P_2}> &= \mathbf{3}A + \mathbf{2}B - \mathbf{5}C = \mathbf{0} \\ <\overrightarrow{N}, \overrightarrow{P_1P_3}> &= A + B - C = \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \mathbf{3}C,\ B = -\mathbf{2}C$$

Luego, si tomamos C=1, se tiene $\overrightarrow{N} = \mathbf{3}\,i - \mathbf{2}\,j + k$ de donde la familia de planos $3x\text{-}2y\text{+}z\text{+}D\text{=}0$ es normal a $\overrightarrow{N}$ y, como el plano pedido pasa por los puntos dados, se tiene que D=-5

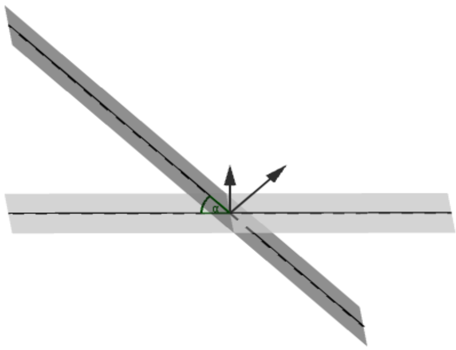
Por lo tanto, la ecuación buscada es:

$$3x-2y+z-5=0$$



EJEMPLO 3: Calcular la amplitud del ángulo determinado por los planos

4x-8y-z+5=0 y x+2y-2z+3=0



Solución:

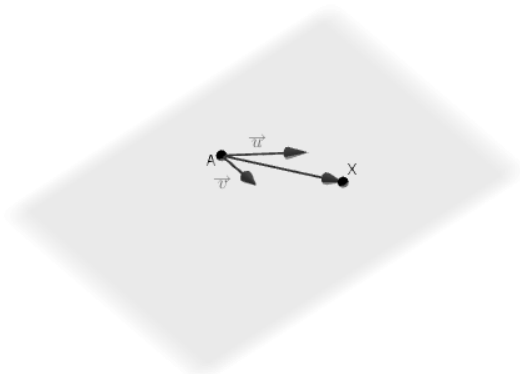
El ángulo entre dos planos es igual al ángulo (o su suplemento) entre sus normales

Los vectores $\overrightarrow{N_1}=\dfrac{\mathbf{4}\,i-\mathbf{8}\,j-k}{\mathbf{9}}$ y $\overrightarrow{N_2}=\dfrac{i+\mathbf{2}\,j-\mathbf{2}k}{\mathbf{3}}$ son vectores unitarios normales a los planos dados,

$$<\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2}>=\mathbf{1}.\mathbf{1}.\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \cos\theta=\frac{\mathbf{4}.\mathbf{1}-\mathbf{8}.\mathbf{2}-\mathbf{1}.(-\mathbf{2})}{\mathbf{27}}$$

$$\cos\theta=-\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{27}} \quad\Rightarrow\quad \theta\cong\mathbf{122}^{\circ} \quad ó \quad \theta\cong\mathbf{58}^{\circ}$$

Ecuación vectorial de un plano π



Elegimos un punto $A\in\pi$ y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente independientes y paralelos a π. Entonces, es fácil ver que $X\in\pi$ si y sólo si $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ son linealmente dependientes (es decir, los tres son paralelos a π), esto ocurre si y sólo si existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$\overrightarrow{AX} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}$ $\quad como \quad$ $\overrightarrow{AX} = X - A$ se tiene

$X = A + \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ que es la **ecuación vectorial** de π

En otras palabras, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la ecuación da un punto X de π y, dado $X \in \pi$, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que se verifica la ecuación.

OBSERVACIÓN:
Si A, B y C son puntos distintos y no colineales de π , podemos tomar $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (por ejemplo) y entonces $X = A + \lambda.\overrightarrow{AB} + \mu.\overrightarrow{AC}$ es una ecuación vectorial de π .

Ecuaciones paramétricas del plano π

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores directores del plano π . Si tomamos un sistema coordenado en el que $X = (x, y, z)$ $\quad A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (m, n, p)$,

resulta: $\quad (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p)$

Es decir

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda.a + \mu.m, y_0 + \lambda.b + \mu.n, z_0 + \lambda c + \mu p)$$

Luego:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda.a + \mu.m \\ y = y_0 + \lambda.b + \mu.n \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases}$$ son las **ecuaciones paramétricas** de π

OBSERVACIÓN:
Si π pasa por los puntos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ y $C = (x_3, y_3, z_3)$ no colineales, entonces podemos tomar como vectores directores

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

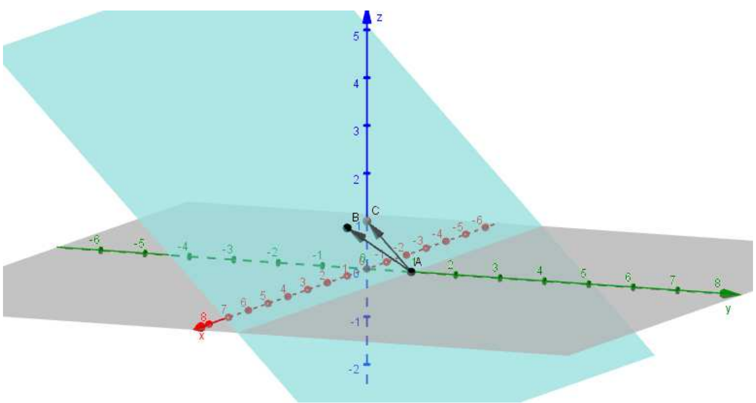
$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

Luego: $$\begin{cases} x = x_1 + \lambda.(x_2 - x_1) + \mu.(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda.(y_2 - y_1) + \mu.(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda.(z_2 - z_1) + \mu.(z_3 - z_1) \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

son ecuaciones paramétricas de π

Ejemplo 1: Hallar una ecuación vectorial del plano que contiene los puntos A=(0,1,0), B=(1,0,1) y C=(0,0,1)

Solución:



$\overrightarrow{AB} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{1})$
$\overrightarrow{AC} = (\mathbf{0}, -\mathbf{1}, \mathbf{1})$ son linealmente independientes,

luego todo punto X del plano está dado por

$X = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) + \lambda.(\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}) + \mu.(\mathbf{0}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que es una ecuación vectorial del plano.

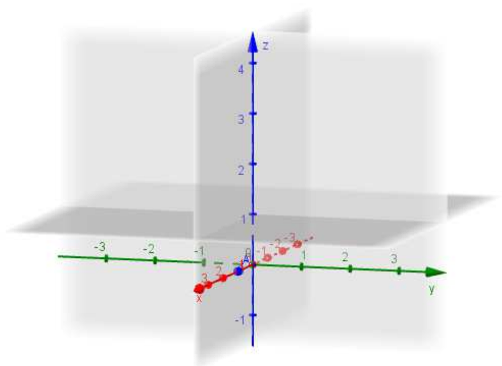
Ejemplo 2: Esbozar el plano que tiene por ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = \mathbf{1} \end{cases}$$

Solución: Escribimos las ecuaciones de la forma:

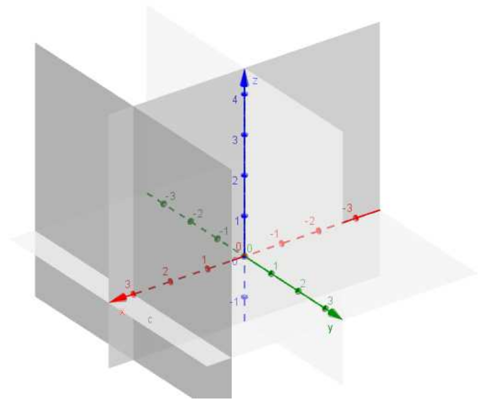
$$\begin{cases} x = \boxed{0} + \lambda \boxed{1} + \mu \boxed{0} \\ y = \boxed{0} + \lambda \boxed{0} + \mu \boxed{1} \\ z = \boxed{1} + \lambda \boxed{0} + \mu \boxed{0} \end{cases}$$
$$A \qquad \vec{u} \qquad \vec{v}$$

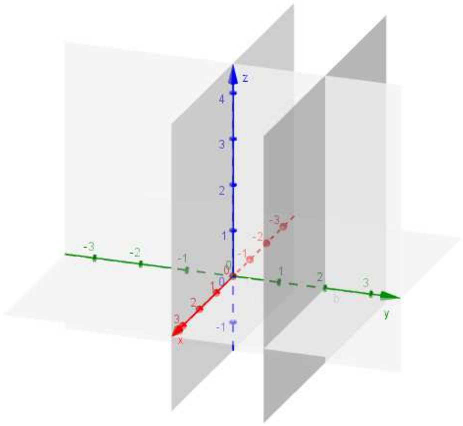
Vemos que π pasa por A = (0, 0, 1) y es paralelo a $\vec{u} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ y a $\vec{v} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$, así tenemos:



Observación:
el plano obtenido en el ejemplo precedente, es de la forma $z = k \quad , k \in \mathbb{R}$, (en este caso con k=1), paralelo a plano XY.

De igual modo, con ecuaciones del tipo $x = t \quad , t \in \mathbb{R}$ tendremos ecuaciones de los planos paralelos al plano YZ , (en el dibujo se graficó el plano x=3)





y con $y = s$, $s \in \mathbb{R}$ tendremos las ecuaciones de los planos paralelos al plano XZ, en el dibujo se graficó el plano y=2

Ejemplo 3: Dar una ecuación vectorial del plano π , que tiene por ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = -\mathbf{6} + \lambda - \mu \\ y = -\mathbf{1} + \mathbf{7}\lambda - \mathbf{14}\mu \\ z = \mathbf{4} - \mathbf{5}\lambda + \mathbf{2}\mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

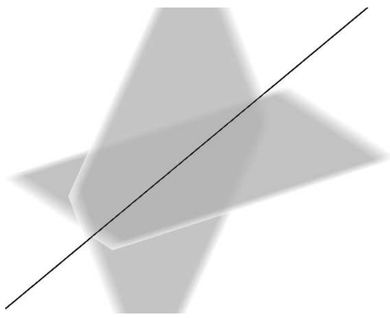
$X = (-\mathbf{6}, -\mathbf{1}, \mathbf{4}) + \lambda.(\mathbf{1}, \mathbf{7}, -\mathbf{5}) + \mu.(-\mathbf{1}, -\mathbf{14}, \mathbf{2}) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ es una ecuación vectorial de π

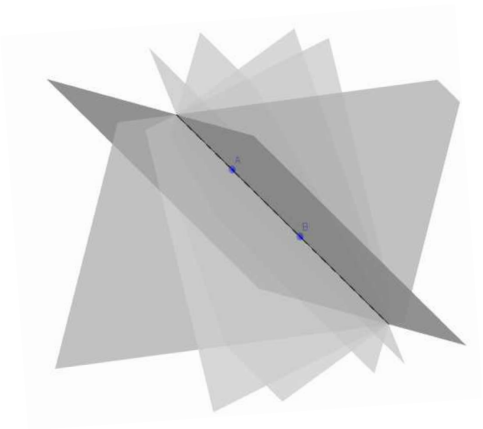
Ecuaciones de una recta

Forma implícita

Una recta en el espacio puede definirse como la intersección de dos planos que pasen por ella.

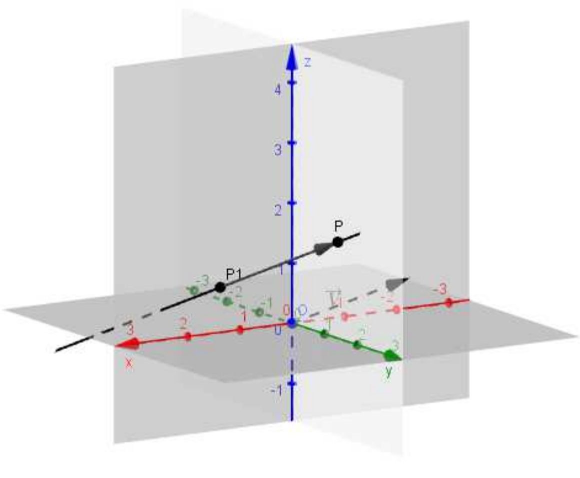
$$r : \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = \mathbf{0} \\ A"x + B"y + C"z + D" = \mathbf{0} \end{cases}$$





Luego, hay infinidad de maneras de definir una recta, ya que hay infinidad de planos que pasan por ella.

Ecuacion Vectorial



Sea L la recta que pasa por un punto dado $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y es paralela a un vector dado distinto del vector nulo $\vec{V} = Ai + Bj + Ck$. Si P=(x,y,z) es un

punto sobre la recta, entonces el vector $\overrightarrow{P_1P}$ es paralelo a $\vec{V}$. Recíprocamente, si $\overrightarrow{P_1P}$ es paralelo a $\vec{V}$, el punto P está sobre la recta L.
Por tanto, P está sobre L si y sólo si, existe un escalar λ, tal que :

$$\overrightarrow{P_1P} = \lambda.\vec{V}$$

Como las componentes de $\overrightarrow{P_1P}$ *son* $P - P_1$ y las de $\vec{V}$ son (A,B,C)
queda: $P - P_1 = \lambda.(A, B, C)$ de donde $P = P_1 + \lambda.(A, B, C)$

Luego una **ecuación vectorial** de L es:

$$L : P_1 + \lambda.(A, B, C)$$

El vector $\vec{V}$ es el **vector director** de la recta.

Retomando la ecuación $\overrightarrow{P_1P} = \lambda.\vec{V}$ se ve que:

$$(x - x_1).i + (y - y_1).j + (z - z_1).k = A.\lambda.i + B.\lambda.j + C.\lambda.k$$

Igualando los coeficientes correspondientes:

$$x - x_1 = A.\lambda \quad ; \quad y - y_1 = B.\lambda \quad ; \quad z - z_1 = C.\lambda$$

Entonces:

$$x = x_1 + A.\lambda \quad : \quad y = y_1 + B.\lambda \quad ; \quad z = z_1 + C.\lambda$$

que son las **ecuaciones paramétricas** de la recta

En general, estas ecuaciones se escriben de la siguiente forma:

$$L : \begin{cases} x = x_1 + A.\lambda \\ y = y_1 + B.\lambda \\ z = z_1 + C.\lambda \end{cases}$$

Dando a λ un valor real se obtienen x, y ,z coordenadas de un punto de L. De esta forma todo punto de L, se obtiene cuando λ toma todos los valores reales.

Al despejar λ en las ecuaciones anteriores e igualando se obtiene:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C} \qquad \text{con } A \neq 0 \;\; B \neq 0 \;\; C \neq 0$$

Son las **ecuaciones simétricas** de la recta L.

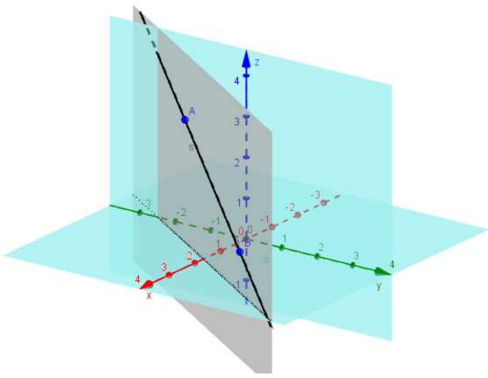
Los planos perpendiculares a los planos coordenados se llaman **planos proyectantes**

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B} \quad ; \quad \frac{x-x_1}{A}=\frac{z-z_1}{C} \quad ; \quad \frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$$

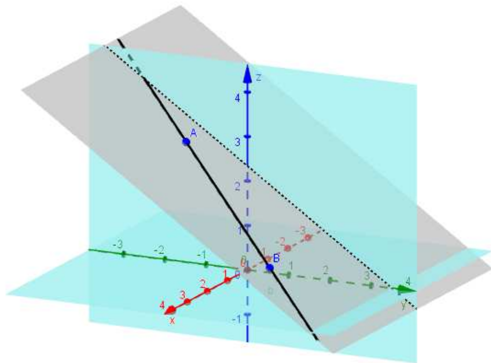
Plano proyectante sobre el plano XY ; Plano proyectante sobre el plano XZ ; Plano proyectante sobre el plano YZ

Con cualesquiera dos de las ecuaciones anteriores se obtiene un sistema de ecuaciones cuya solución es la intersección de dos planos, en este caso los planos proyectantes y, por lo tanto, determinan la recta L .
En las siguientes ilustraciones se muestran los tres planos proyectantes de la recta que pasa por los puntos A y B:

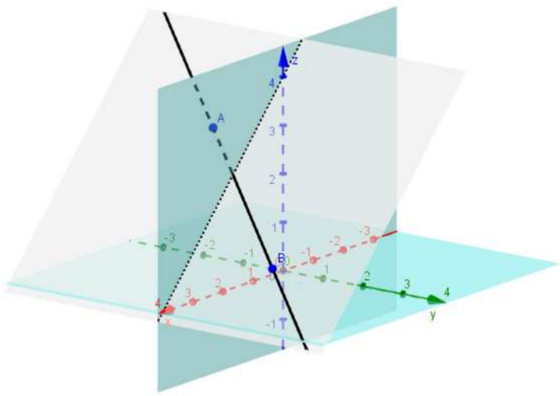
Proyectante sobre el plano XY:



Proyectante sobre el plano YZ:



Proyectante sobre el plano XZ:



<u>Observaciones</u>:

1) Si la recta L , antes mencionada, es tal que A = 0 y B y C son distintos de cero, entonces la recta pasa por $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ y es paralela al vector $\vec{V}=Bj+Ck$. Luego la recta es paralela al plano YZ, y en consecuencia el plano $x=x_1$ la contiene.
2) Si A = B = 0; $C\neq 0$, entonces la recta pasa por $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ y es paralela al eje Z, luego ella es la intersección de los planos: $x=x_1 \quad e \quad y=y_1$.

<u>Ejemplos</u>

1) Encontrar las ecuaciones simétricas que representan la recta que pasa por el punto C = (2,-1,3) y es paralela al vector $\vec{V} = 2i - 5j + 6k$. Encontrar además, un conjunto de ecuaciones paramétricas de la misma recta.

Rta: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z-3}{6}$ ecuaciones simétricas de la recta

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 - 5\lambda \quad con \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases}$$ ecuaciones paramétricas de la recta.

2) Encontrar ecuaciones simétricas de la recta que pasa por:
$P_1 = (2,-4,5) \quad y \quad P_2 = (-1,3,1)$
Rta: el vector director de la recta puede ser:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = -3.i + 7.j - 4k$$

Entonces las ecuaciones son:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-5}{-4}$$

3) Escribir ecuaciones de la recta que pasa por los puntos:

$$P_1 = (2,6,4) \quad y \quad P_2 = (3,-2,4)$$

Rta: El vector director puede ser: $\overrightarrow{P_1P_2} = i - 8j$
entonces la recta es paralela al plano XY.

El plano z = 4 contiene a la recta.

Sus ecuaciones pueden ser:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-8} \quad ; \quad z = 4$$

O bien:

$$8x + y - 22 = 0 \quad ; \quad z = 4$$

4) Encontrar ecuaciones, en forma simétrica y en forma vectorial, de la recta intersección de los planos:

$$\pi_1 : x + y - z - 7 = 0 \quad y \quad \pi_2 : x + 5y + 5z + 5 = 0$$

Rta: aplicando operaciones elementales eliminamos z y queda :

$$6x+10y-30=0$$

Después despejamos y :

$$y=\frac{-3x+15}{5} \qquad (1)$$

Aplicando nuevamente operaciones elementales eliminamos x y queda:

$$4y+6z+12=0$$

Ahora despejamos y:

$$y=\frac{-3z-6}{2} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2), obtenemos:

$$\frac{-3x+15}{5}=y=\frac{-3z-6}{2}$$

Dividiendo todos los miembros por (-3), se obtienen:

$$\frac{x-5}{5}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{2}$$ Ecuaciones simétricas de la recta pedida

Se observa que la recta pasa por $P_1=(5,0,-2)$ y es paralela al vector $\vec{V}=5.i-3.j+2.k$

Entonces su ecuación en la forma vectorial, puede ser:

$$L:(5,0,-2)+\lambda.(5,-3,2) \quad con\ \lambda\in\mathbb{R}$$

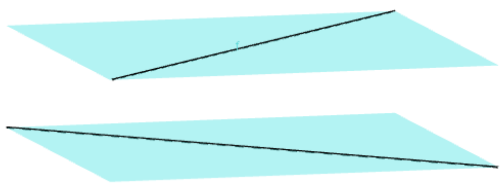
<u>Nota:</u> Puede resolverse de otras formas, por ejemplo:

a) Hallando dos puntos que satisfagan ambas ecuaciones de los planos dados y a partir de ellos calcular el vector director de la recta.
b) Obtener un vector director de la recta, calculando el producto vectorial entre las normales de ambos planos y considerando un punto que pertenezca a la recta.

<u>Posiciones relativas de las rectas:</u>

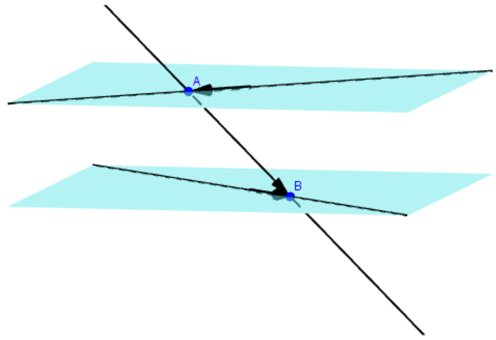
Rectas Alabeadas

Definición: Dos rectas en el espacio son **alabeadas** cuando no se intersectan ni son paralelas**.**



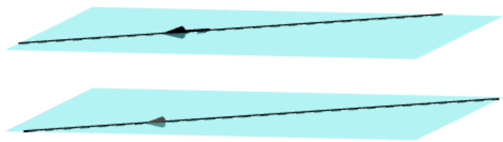
Dadas dos rectas **r** y **s** se quiere conocer si son paralelas, concurrentes o alabeadas y, si son paralelas, verificar si son coincidentes o distintas.
Si designamos por $\vec{r}=(a,b,c)$ un vector director de la recta **r**, por $\vec{s}=(m,n,p)$ un vector director de la recta **s**, por $A=(x_1,y_1,z_1)$ un punto cualquiera de la recta **r** y por $B=(x_2,y_2,z_2)$ un punto cualquiera de **s**,
observemos que:

- ✓ r y s son **alabeadas** si y solamente si $\{\vec{r},\vec{s},\overrightarrow{AB}\}$ es linealmente independiente, o sea si y solamente si:



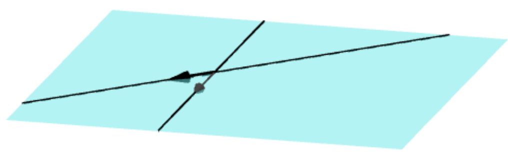
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

- ✓ **r** y **s** son **paralelas** si y solamente si $\{\vec{r},\vec{s}\}$ es linealmente dependiente,
esto es, si y solamente si existe $\lambda \in R$ tal que $\vec{r}=\lambda.\vec{s}$



- ✓ **r** y **s** son **concurrentes** si y sólo si son coplanares y no son paralelas, es decir, si y sólo si:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0$$



y $\{\vec{r},\vec{s}\}$ es l.i

En resumen:
Si $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son respectivamente vectores directores de las rectas **r** y **s** tenemos dos posibilidades:

$\{\vec{r},\vec{s}\}$ es linealmente independiente (l.i.) o

$\{\vec{r},\vec{s}\}$ es linealmente dependiente (l.d.)

1.) Si $\{\vec{r},\vec{s}\}$ es l.i elegimos un punto $A\in r$ y un punto $B\in s$ y verificamos que ocurre con el conjunto $\{\vec{r},\vec{s},\overrightarrow{AB}\}$

- ✓ si es linealmente independiente, entonces **r** y **s** son alabeadas
- ✓ si es linealmente dependiente entonces **r** y **s** son concurrentes.

2.) Si $\{\vec{r},\vec{s}\}$ es linealmente dependiente entonces r y s son paralelas.

Resta verificar si son coincidentes o distintas, para esto elegimos un punto cualquiera P de **r** y verificamos si $P\in s$, entonces
Si P$\in$ **s** tenemos **r=s**
Si P$\notin$ s tenemos r//s y $r\cap s=\varnothing$

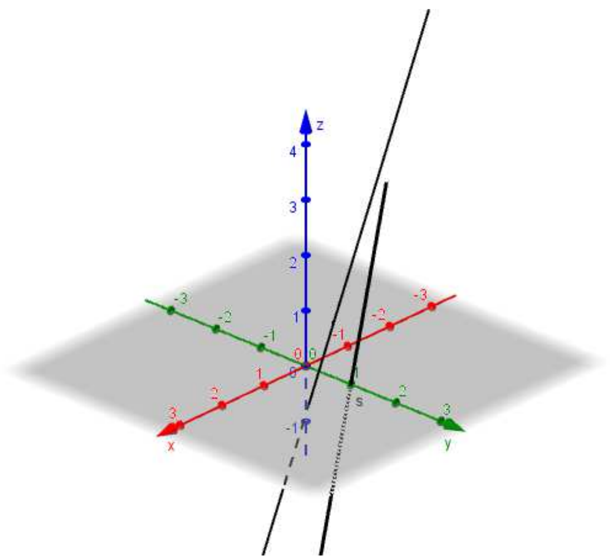
Ejemplo 1. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r: X=(1,2,3)+\lambda(0,1,3) \quad \lambda\in\mathbb{R}$$
$$s: X=(0,1,0)+\mu(1,1,1) \quad \mu\in\mathbb{R}$$

Tenemos $\vec{r}=(0,1,3)$ y $\vec{s}=(1,1,1)$ luego se observa fácilmente que $\{\vec{r},\vec{s}\}$ es linealmente independiente.
Tomemos ahora un punto en cada recta por ejemplo:

A=(1,2,3)$\in r$ y B=(0,1,0) $\in s$ y consideremos $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-3)$ y como

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2\neq 0$$



Concluimos que $\{\vec{r},\vec{s},\overrightarrow{AB}\}$ es linealmente independiente, por tanto **r** y **s** son alabeadas.

Ejemplo 2. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r: X = (1,2,3) + \lambda(0,1,3) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$s: X = (1,3,6) + \mu(0,2,6) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

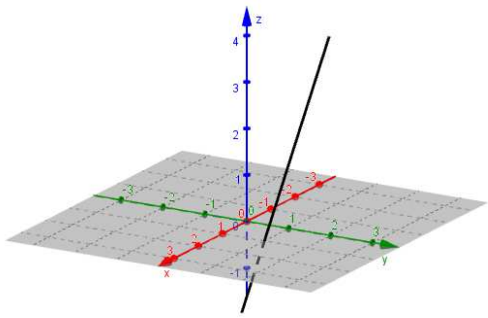
Tenemos que $\vec{r} = (0,1,3)$ y $\vec{s} = (0,2,6)$.

Luego $\vec{s} = 2.\vec{r}$ por lo tanto $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ es linealmente dependiente y r//s.

Veamos ahora si son o no coincidentes:
Tomamos $A = (1,2,3) \in r$ y analizamos si $A \in s$

$$(1,2,3) = (1,3,6) + \mu(0,2,6) \qquad \mu \in \mathbb{R}$$
$$(1,2,3) = (1, 3+2\mu, 6+6\mu)$$

$$\begin{cases} 3+2\mu = 2 \rightarrow \mu = \dfrac{2-3}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ 6+6\mu = 3 \rightarrow \mu = \dfrac{3-6}{6} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$



$A \in s$

y concluimos que r = s

Ejemplo 3: Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r: (1,3,6) + \lambda(0,1,3) \qquad \lambda \in r$$

$$s: \begin{cases} x+y+z = 6 \\ x-y-z = -4 \end{cases}$$

El vector (0,1,3) es vector director de **r** (paralelo a **r**) Para determinar un vector $\vec{s}$ paralelo a **s**, tomemos dos puntos de **s**.

Si z=0 en las ecuaciones de **s** obtenemos x=1 e y=5
Si z=1 en las ecuaciones de **s** obtenemos x=1 e y=4,

luego B=(1,5,0) y C=(1,4,1) son puntos de s y por lo tanto $\vec{s} = \overrightarrow{BC} = (0,-1,1)$ es un vector director de s.

Como $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ es linealmente independiente las rectas no son paralelas.

Tomemos entonces el punto $A=(1,3,6)\in r$ y como $\overrightarrow{AB}=(0,2,-6)$ observemos que:

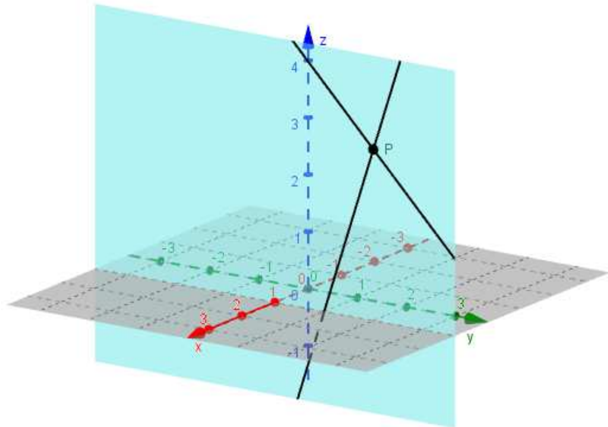
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Luego $\left\{\vec{r},\vec{s},\overrightarrow{AB}\right\}$ es linealmente dependiente por lo tanto r y s son coplanares y como no son paralelas, concluimos que son concurrentes.

Hallamos el punto de intersección :

$(1,3,6)+\lambda(0,1,3)=(1,5,0)+\mu(0,-1,1)$

El punto es P : (1,2,3).



POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Para estudiar la posición relativa entre dos planos π_1 y π_2 , consideremos sus ecuaciones generales:

$\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

La matriz de coeficientes M= $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$

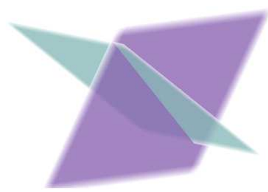
y la matriz ampliada M´= $\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{array}\right)$

Entonces:

- ✓ Si **rg(M) = rg(M') = 1** los planos son **coincidentes**

$\pi_1 = \pi_2$

El sistema de ecuaciones es **compatible indeterminado**

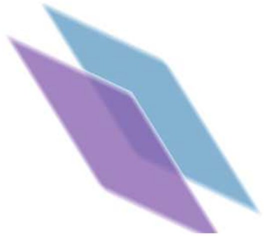


- ✓ Si **rg(M) = rg(M') = 2** los planos son **secantes**, es decir, su intersección es una recta

El sistema de ecuaciones es **compatible indeterminado**

✓ Si **rg(M)** $\neq$ **rg(M')** los planos son **paralelos**

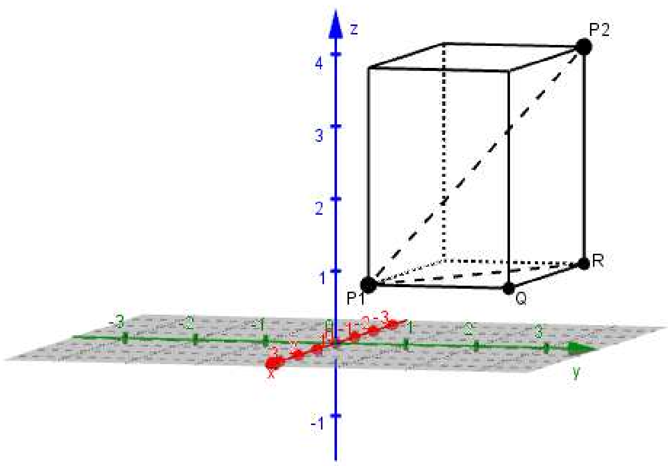
El sistema de ecuaciones es **incompatible**



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Dados los puntos
$P_1=(x_1,y_1,z_1)$ y
$P_2=(x_2,y_2,z_2)$, se trata de calcular la distancia entre ambos.
Para ello, consideremos los puntos $Q=(x_1,y_2,z_1)$ y
$R=(x_2,y_2,z_1)$.
Se obsreva que en el triángulo P_1QR, rectángulo en Q, la distancia P_1R (por Teorema de Pitágoras), está dada por:

$$\overline{P_1R}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$



En el triángulo P_1RP_2, rectángulo en R, tenemos que:

$$\overline{P_1P_2}^2=\overline{P_1R}^2+\overline{RP_2}^2=\underbrace{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}_{\overline{P_1R}^2}+\underbrace{\left(z_2-z_1\right)^2}_{\overline{RP_2}^2}$$

Por lo tanto, la distancia buscada está dada por :

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$$

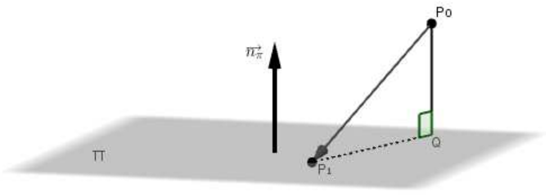
Distancia de punto a plano:

Sea π un plano de ecuación

$\pi: Ax+By+Cz+D=0$ y

$P_0=(x_0,y_0,z_0)$, un punto cualquiera.

Sea $P_1=(x_1,y_1,z_1)\in\pi$ y



consideremos el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$

Observemos que

$d(P_0,\pi) = d(P_0,Q)$

equivale al segmento proyección del vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ sobre el vector $\overrightarrow{n_\pi}$
es decir:

$$\frac{\left|<\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{n_\pi}>\right|}{\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|} =$$

$$\frac{\left|<(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0),(A,B,C)>\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\left|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$\frac{\left|Ax_1-Ax_0+By_1-By_0+Cz_1-Cz_0\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\left|-Ax_0-By_0-Cz_0-D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

pues, como el punto P_1 pertenece al plano, sus coordenadas satisfacen la ecuación

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \quad \text{, de donde} \quad -D = Ax_1+By_1+Cz_1$$

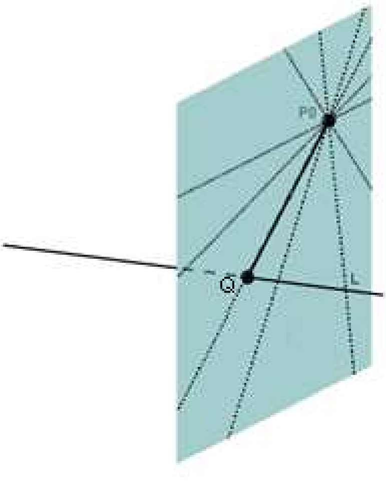
y, como estamos trabajando con valor absoluto, la expresión final queda:

$$d(P_0,\pi) = \frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ejemplo: Si P_0:(0,1,3) y $3x+4y-5z+1=0$ hallar la distancia de P_0 a π

$$d(P_0,\pi) = \frac{\left|3.0+4.1-5.3+1\right|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} = \frac{10}{\sqrt{50}}.\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = \sqrt{2}$$

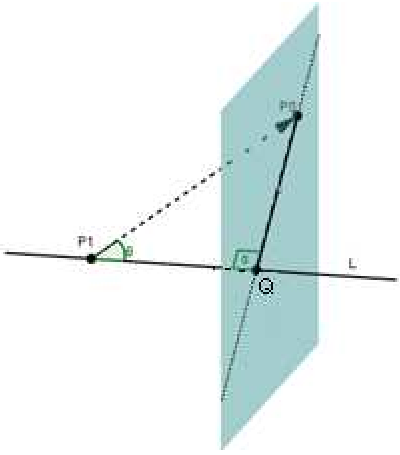
<u>Distancia de punto a recta</u>



Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto y L una recta en el espacio. A diferencia del Plano, existen infinitas rectas ortogonales a L que pasan por P_0, todas se hallan contenidas en el único plano π que pasa por P_0 y es perpendicular a L, pero solo **una de ellas es perpendicular a L.**

π interseca a L en un único punto Q.

Definimos la distancia de P_0 a L y la notamos d (P_0,L), como la distancia entre P_0 y Q, es decir d(P_0,L)=d(P_0,Q)



Sea $P_1 \in$ L y consideremos el vector $\overrightarrow{P_1P_0}$

$$d(P_0,L)=d(P_0,Q)=\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\right\|.sen(\theta)$$

$$=\frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\right\|.sen(\theta).\left\|\overrightarrow{d_L}\right\|}{\left\|\overrightarrow{d_L}\right\|}=\frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\wedge\overrightarrow{d_L}\right\|}{\left\|\overrightarrow{d_L}\right\|}$$

siendo $\overrightarrow{d_L}$ el vector director de la recta L

Ejemplo: Si P_0:(1,2,3) y L=(1,0,-1)+λ(2,2,1) λ∈R hallar la distancia de P_0 a L.

Solución: Tomemos un punto perteneciente a L, por ejemplo P_1=(1,0,-1), entonces: $\overrightarrow{P_1P_0}=(0,2,4)$

Luego:

$$d(P_0,L)=\frac{\left\|\begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ 0 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{\left\|-6\vec{e_1}+8\vec{e_2}-4\vec{e_3}\right\|}{3}=\frac{2\sqrt{29}}{3}$$